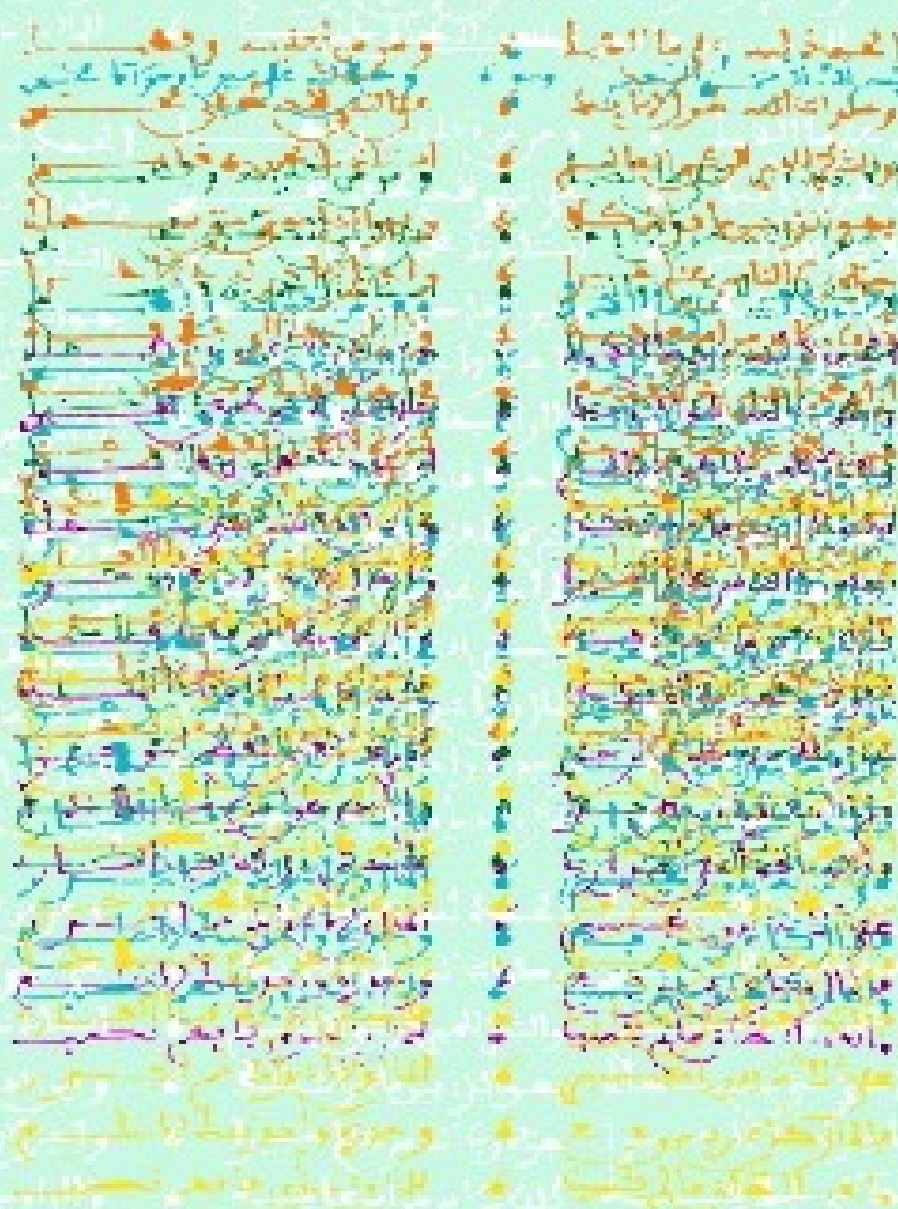


Mathématique AUTREMENT

Suites et différences finies

Mauricio Garay



MATHÉMATIQUE AUTREMENT

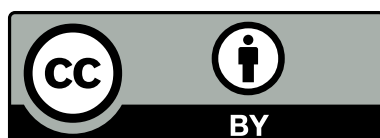
MAURICIO GARAY

Mathématique autrement

Suites et Différences finies

Mathématique autrement, Suites et différences finies.

Mauricio Garay – Lycée Franco-Allemand, Buc.
impr. 2018. –1 vol. (214 p.).
ISBN 978-1-72871-739-5



Ce texte publié sous licence creative commons CC-BY 4.0 est librement téléchargeable sur le site du club mathématique du lycée franco allemand <http://www.maths-buc.fr>.

À l'exception des images soumises à des droits d'auteurs signalées par le symbole ©, vous pouvez copier ce texte, le modifier, même à des fins commerciales.

Mauricio Garay
Lycée franco-allemand
7 Rue Collin Mamet
78530 Buc
France
mauricio.garay@ac-versailles.fr

TABLE DES MATIÈRES

Partie I. Suites.....	1
1. La suite de Fibonacci.....	3
2. Le concept mathématique de suite.....	17
3. Suites arithmétiques et géométriques.....	27
4. Suites arithmético-géométriques.....	43
5. Récurrences linéaires d'ordre 2.....	53
6. Récurrences quadratiques.....	77
7. Ce que nous ignorons est immense.....	99
Partie II. Différences Finies.....	115
1. La méthode d'exhaustion.....	117
2. Somme d'une suite.....	131
3. Le principe de Leibniz.....	145
4. Quadrature de la parabole.....	163
5. Dérivée discrète.....	177
6. L'intégrale discrète.....	191
7. Le théorème fondamental de l'analyse.....	205
Images.....	211

PARTIE I

SUITES

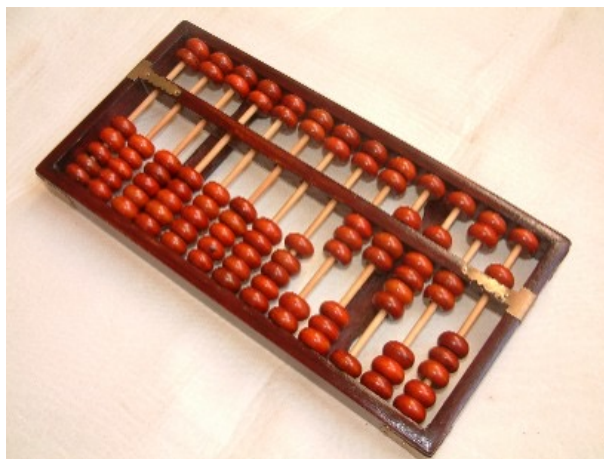
CHAPITRE 1

LA SUITE DE FIBONACCI

1.1. La querelle des abaqués

Dans l'Antiquité, pour compter leurs marchandises et leurs revenus, les commerçants disposaient de petits cailloux sur des colonnes représentant par exemple unités et dizaines. Ces cailloux –calculi en latin– donnèrent leur nom au calcul.

Les pierres furent ensuite organisées dans des tableaux et parfois fixées sur des tiges, ainsi naquirent les *abacus*, objets destinés au calcul dont le plus connu est le boulier :



L'abaque est un outil puissant pour le calcul, aujourd'hui encore on enseigne son usage dans certains pays d'Asie, comme la Chine ou le Japon. En Europe, cet enseignement a commencé à disparaître vers la fin du Moyen-Âge, suite à la *querelle des abaqes*.

Lieu d'échange et de commerce, la Méditerranée offrait un espace propice au développement des sciences. Les marchands parlaient alors un merveilleux charabia –la *lingua franca*– mélange des langues du bassin méditerranéen que Molière a éternisé dans le *Bourgeois Gentilhomme*.

Mais lorsque les Arabes s'approprièrent le savoir mathématique des Grecs puis des Indiens, leurs commerçants se chargèrent de l'utiliser. On imagine alors des marchands vénitiens obligés de compter sur leurs doigts ou sortir des abaqes pour effectuer des calculs alors que leurs interlocuteurs arabes pouvaient mentalement calculer le bénéfice d'une transaction.

La situation ne pouvait donc durer pour les Italiens : ils devaient apprendre le calcul des Arabes. Pour cela, ils voyagèrent de Cordoue à Bagdad, apprirent la langue de leurs partenaires commerciaux et ramenèrent en Europe des trésors inestimables : l'algèbre, la géométrie et le muamalat c'est-à-dire l'arithmétique commerciale.

Tout ce savoir constituait une richesse culturelle que les marchands devaient transmettre à leurs enfants. Il se développa ainsi dans les villes italiennes des *écoles de marchands* appelées paradoxalement *écoles des abaqes* où l'on enseignait l'art florissant de l'algèbre et de l'arithmétique. Les marchands y envoyaient leurs enfants pour y étudier, entre autres, les chiffres indo-arabes.

La gravure ci-dessous représente Dame Arithmétique entourée des philosophes Boèce et Pythagore. Alors que le savant grec peine à effectuer un calcul sur son abaque antique, l'élève triomphe du maître à l'aide des chiffres indo-arabes.



Illustration de Margarita Philosophica de Gregor Reisch (1467-1525),

La nouveauté fait rarement l'unanimité et, rapidement des partisans de l'abaque –les abacistes– s'opposèrent à l'introduction des chiffres indo-arabes. Ainsi naquit *la querelle des abaques*.

Les algoristes se réclamaient du mathématicien que l'on appelait alors Al-Muhammad et que nous nommons Al-Khwarizmi. Certains maîtrisaient non seulement l'algèbre mais aussi la langue arabe et connaissaient parfois la religion de leurs maîtres. Il nous est difficile de comprendre comment le savoir s'est infiltré dans l'Europe occidentale, mais quelques anecdotes, quelques récits, nous aident à comprendre ce phénomène. À la fin de la Renaissance, l'algébriste Cardan nous révèle qu'il a appris la géométrie et l'algèbre de son père, sans nous en dire plus. Dans son ouvrage *De la subtilité*, il voit quasiment dans les trois monothéismes une seule et même religion, dont les querelles sont par conséquent dénuées de sens : *Les adoreurs de Mahomet n'ont pas plus d'estime du Chrétien – et le Juif pour les deux réunis– que d'un chien enragé*. De plus, dans son *Ars Magna*, Cardan cite Al-Khwarizmi comme le père fondateur de l'algèbre.

Est-ce pour ces propos, pour son ésotérisme ou bien pour des raisons familiales que Cardan fut jugé par l'Inquisition, incarcéré et expulsé de l'Université ? Nous n'en savons rien. En tout cas, deux siècles avant l'avènement de l'Algèbre italienne, dans cette période de transition que constitue le XIII^e siècle, les algoristes représentaient un danger à bien des égards !

1.2. À l'école des marchands

Avant l'algèbre et l'introduction de quantité inconnues x , a ou encore α , il faut savoir compter. Nous avons donc été vite en besogne en nous attaquant directement à des problèmes d'algèbre complexe comme la résolution des équations du second et troisième degré ⁽¹⁾.

1. Voir *Mathématique Autrement, Algèbre*.

Remontons donc le cours de l'histoire et installons-nous à Venise à la fin du XII^{ème} siècle. C'est là que naît Léonard de Pise, dit Fibonacci, le fils de Bonacci. Fils de marchand, il voyage de l'Algérie à la Syrie et écrit plusieurs ouvrages parmi lesquels le célèbre *Liber Abbaci* ou *livre des abaques*, un des piliers de l'enseignement des algoristes. Le titre de l'ouvrage est trompeur, il ne s'agit en aucun cas d'un livre pour apprendre à se servir d'une abaque ; bien au contraire, les méthodes développées par Léonard sont celles des algoristes et, ce livre concerne avant tout l'apprentissage des chiffres indo-arabes.

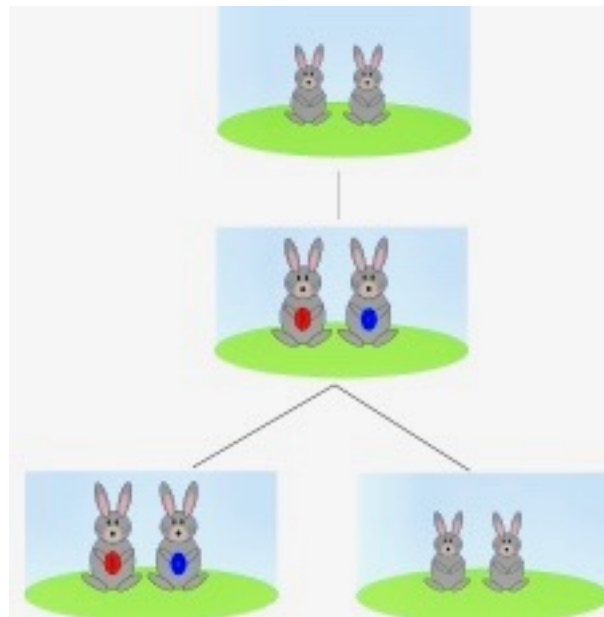


Léonard de Pise dit Fibonacci (env. 1175-1250)

Habitués depuis l'enfance à l'écriture décimale, nous ne pensons pas qu'elle constitue à elle seule une aventure de la pensée humaine, qui nous a conduit à la possibilité d'effectuer des calculs complexes de manière simple. À l'époque de Fibonacci, il fallait convaincre et montrer sa supériorité par rapport au calcul des abaques.

Pour démontrer l'utilité des chiffres indo-arabes, Léonard de Pise nous propose le problème suivant :
« *Un homme avait une paire de lapins dans un certain endroit, qui était entouré de tous côtés par des murs. Il pouvait savoir combien de couples il avait chaque année, car il donnait naissance à un couple dès l'âge de deux mois(...).* »

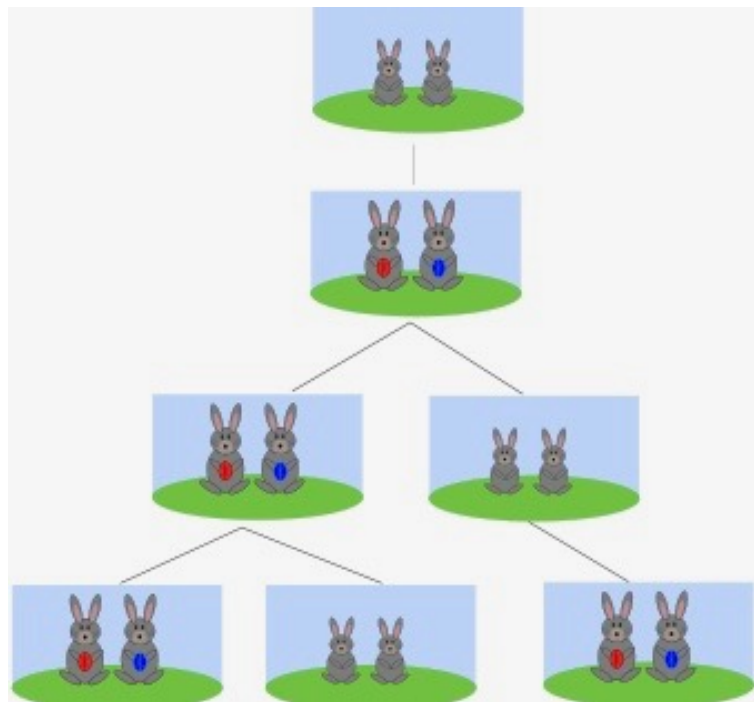
Autrement dit deux lapins jouent dans un enclos. Le premier mois, nos deux lapins sont trop jeunes, ce sont encore des lapereaux. Puis, le deuxième mois, ils s'accouplent et donnent naissance à deux lapereaux.



©

Au deuxième mois, nous avons donc deux couples de lapins. Le plus vieux âgé de deux mois est constitué de deux lapins adultes alors que le second est constitué de leurs petits, deux jeunes lapereaux.

Au troisième mois, le couple âgé donne naissance à un nouveau couple, mais leurs enfants sont encore trop jeunes. Nous avons donc le mois suivants trois couples de lapins : l'un âgé de trois mois, l'autre d'un mois et deux petits lapereaux. Voici donc les quatre premières générations :

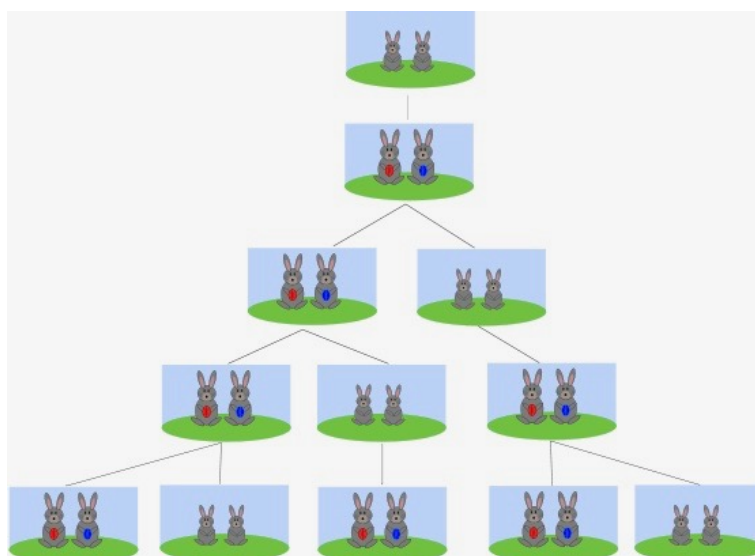


©

À gauche les parents, à leur droite les nouveaux-nés et encore à droite le frère et la soeur aînés.

Chacun des couples adultes, âgés respectivement de trois et un mois, donne naissance à un couple quant au couple de lapereaux, ils sont encore trop jeunes pour s'accoupler.

La population passe ainsi à cinq individus, trois adultes et deux lapereaux.

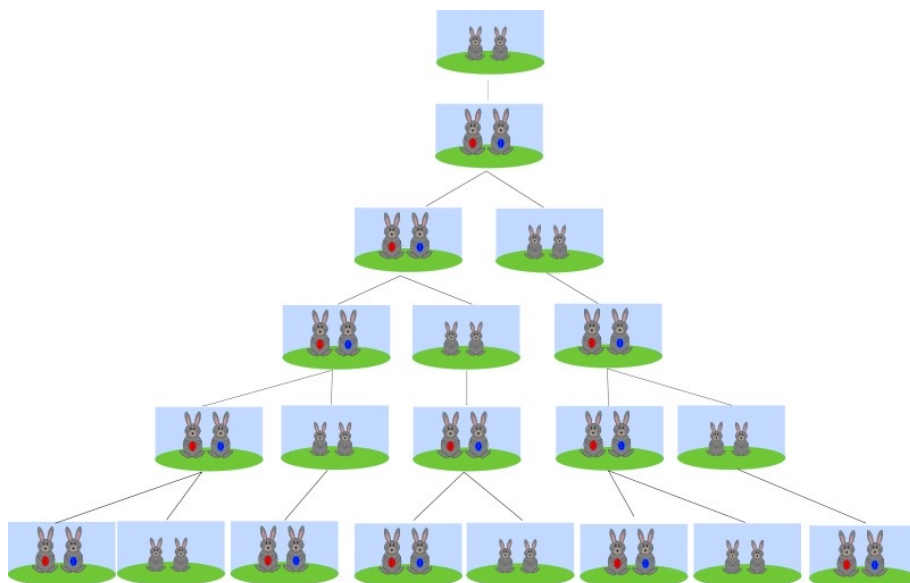


©

La suite du nombre de couples mois après mois est donc :

mois numéro	0	1	2	3	4
nb de couples	1	1	2	3	5

Le mois suivant, les trois nouvelles naissances font passer la population à huit lapins :



©

Résumons la situation par un tableau :

mois numéro	0	1	2	3	4	5
nb de couples	1	1	2	3	5	8

Léonard de Pise demande de calculer combien de lapins se trouveront dans l'enclos à la fin de l'année, soit au bout de douze mois. Un marchand doit savoir faire rapidement un grand nombre d'additions !

Observons le tableau précédent. Chaque terme de la deuxième ligne est la somme des deux précédents :

$$3 = 1 + 2$$

$$5 = 3 + 2$$

$$8 = 5 + 3$$

La raison est simple, le terme précédent constitue le nombre de couples de lapins C et celui qui le précède le nombre de couples d'adultes A . Le nombre total de lapins T vaut

$$T = C + A$$

Par exemple, au quatrième mois on a $C = 5$ couples de lapins dont $A = 3$ sont des adultes, ce qui nous donne dans la colonne suivante $T = 8$ lapins. Le mois suivant T devient C et C devient A . On dit que l'on a une *relation de récurrence*, c'est-à-dire une situation dans lesquels les termes d'une année se calculent en fonction de ceux des années précédentes (ici des deux années précédentes).

Exercice 1.1. — Résoudre le problème de Fibonacci : trouver le nombre de lapins à la fin de l'année.

Réponse. — Continuons le calcul :

$$13 = 8 + 5$$

$$21 = 13 + 8$$

$$34 = 21 + 13$$

$$55 = 34 + 21$$

$$89 = 55 + 34$$

$$144 = 89 + 55$$

$$233 = 144 + 89$$

Ce qui nous permet de compléter notre tableau

<i>mois</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>couples</i>	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

On trouve 233 lapins à la fin de l'année.

Imaginez-vous mener un tel calcul avec des chiffres romains ou encore avec des cailloux ! Vous comprenez maintenant la puissance de ces chiffres nés en Inde, qui ont grandi en Orient, pour se développer dans le monde arabe avant de parvenir en Europe en empruntant les routes commerciales des navires marchands...

1.3. La suite de Fibonacci dans la nature

La phyllotaxie est une branche de la biologie qui étudie les dispositions des éléments d'une plante, d'une fleur ou d'un fruit. Depuis longtemps, biologistes et mathématiciens ont été fascinés par l'apparition de la suite de Fibonacci dans la Nature

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

Examinons cette marguerite d'un peu plus près :



Lorsque l'on regarde de près certaines fleurs, comme la marguerite ou le tournesol, on s'aperçoit que les étamines sont organisées en spirales qui tournent soit vers la gauche, soit vers la droite appelées *parastiches*.

Si l'on compte les parastiches droits de la marguerite, on en distingue 21. Or 21 est le huitième nombre de la suite de Fibonacci :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$



Parastiches droits d'une marguerite. ©

Si l'on compte maintenant les parastiches gauche, on en distingue 34, le nombre qui suit 21 dans la suite de Fibonacci :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$



Parastiches gauches d'une marguerite. ©

D'après les chercheurs de l'Université de Fribourg, dans 94% des cas, le nombre de parastiches gauches et droits sont deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci !

On invoque souvent une raison évolutionniste liée au fait que les quotients de termes consécutifs de la suite de Fibonacci donnent une approximation du nombre d'or :

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \frac{34}{21}$$

Le chercheur Stéphane Douady m'a fait part d'une autre interprétation qui me semble plus plausible : les parastiches mutent et à chaque mutation le nouveau nombre de parastiches est la somme des précédents.

La plante possèderait une machine à calculer élémentaire, capable à partir de deux nombres de fabriquer leur somme. Peut-être en est-il de même dans l'art ? L'apparition du nombre d'or viendrait de la possibilité d'ajouter simplement les longueurs à partir des outils de mesure.

CHAPITRE 2

LE CONCEPT MATHÉMATIQUE DE SUITE

2.1. Suites et fonctions

Après ces excursions botaniques, revenons à nos mathématiques. On pourrait tenter d'aller plus loin et demander à Léonard ce qu'il en serait avec le nombre de lapins au bout de dix ans ? Mais dix ans font 120 mois et le calcul direct serait très long, même avec des chiffres indo-arabes...

À chaque mois correspond un certain nombre de lapins. Nous avons donc affaire une fonction d'un type particulier définie uniquement sur les entiers :

Définition 2.1. — *Une suite est une fonction définie de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

C'est donc le type de fonction le plus simple que l'on puisse imaginer. Pour chaque entier, on a un nombre.

Une suite est donc une fonction très particulière et, à ce titre, on n'utilise presque jamais la notation

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

pour une suite. On lui préfère la notation

$$u = (u_n)$$

ou encore

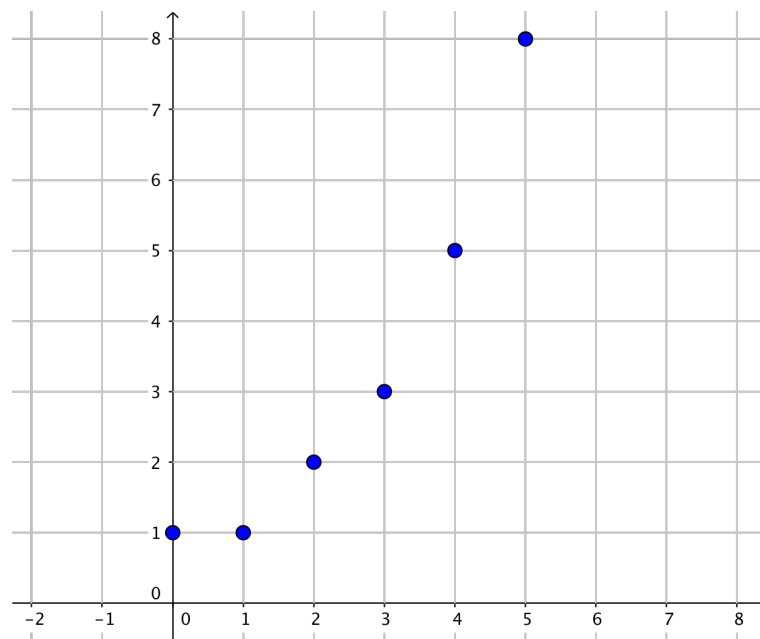
$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots).$$

On peut aussi considérer des suites finies

$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Comme pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on peut parler de suite croissante, décroissante ou constante. Par exemple, la suite de Fibonacci est croissante.

Comme toute fonction, une suite possède un graphe : il est constitué des paires (n, u_n) . Pour la suite de Fibonacci, on a le graphe suivant :

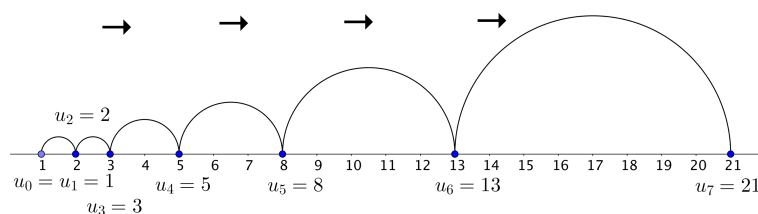


Représentation spatio-temporelle des six premiers termes de la suite de Fibonacci.

L'indice de la suite de Fibonacci correspond au nombre de mois et, souvent en mathématiques, l'indice représente une durée dans le temps. Il arrive donc que u_n soit appelé la valeur de u au temps n . Son graphe

est alors une représentation *spatio-temporelle* donnant la valeur de u à l'instant n .

On peut aussi représenter de manière dynamique, c'est à dire en imaginant une puce qui effectue des bonds et qui se déplace sur un axe. La représentation de la suite de Fibonacci est alors :



Représentation dynamique des sept premiers termes de la suite de Fibonacci.

Parfois au lieu de commencer à u_0 , on commence par un autre terme, par exemple u_1 . On dit alors *la suite de premier terme u_1* pour dire que la fonction n'est pas définie sur $\mathbb{N}$, mais sur les entiers au moins égaux à 1.

Notez que, depuis un siècle, Français et Allemands sont en désaccord profond. Les uns voudraient que 0 soit un entier naturel alors que pour les autres, le premier entier naturel est 1. Ajouter à cela que certains Allemands francophiles adoptent la mode française et vice-versa...

Cela conduit certains mathématiciens à abandonner la notation $\mathbb{N}$ au profit de :

$$\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Exemple 2.2. — Revenons à notre suite de Fibonacci :

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 2$$

$$u_3 = 3$$

$$u_4 = 5$$

$$u_5 = 8$$

$$u_0 = 1,$$

$$u_1 = 1,$$

$$u_2 = u_1 + u_0$$

$$u_3 = u_2 + u_1$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

La suite de Fibonacci est définie par une *réurrence d'ordre 2*, ce qui signifie que le terme à un instant n donné est défini en fonction des deux précédents termes à l'instant $n - 1$ et $n - 2$.

Exemple 2.3. — L'algorithme de Héron, nous fait passer d'une approximation de la racine carrée à une meilleure approximation. C'est une récurrence d'ordre , ce qui signifie que le terme à un instant donné est défini en fonction du précédent. Écrivons-là explicitement pour $\sqrt{2}$. Nous savons que partant de la valeur 1, si x est une approximation de la racine carrée alors

$$\frac{x^2 + 2}{2x}$$

est une meilleure approximation.

On peut ainsi définir une suite : après avoir construit

$$(u_0, u_1, \dots, u_n)$$

on définit le terme suivant par

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}.$$

Si l'on pose $u_0 = 1$, on a alors

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = \frac{1^2 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{(3/2)^2 + 2}{3} = \frac{17}{12} = 1,416\,666\dots$$

etc.

Cette suite est définie par une *réurrence d'ordre 1*, ce qui signifie que le terme à un instant est défini en fonction du terme précédent à l'instant.

2.2. Exercices de base

1. — Définir la suite des nombres impairs $(1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$ par une condition initiale et une formule de récurrence.

2. — Définir la suite des nombres pairs $(0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ par une condition initiale et une formule de récurrence.

3. — Calculer à la main les six premiers termes de la suite définie par

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n, \quad u_0 = u_1 = 1.$$

1. —

$$u_{n+1} = u_n + 2, \quad u_0 = 1$$

2. —

$$u_{n+1} = u_n + 2, \quad u_0 = 0.$$

3. —

$$1, 1, 2, 5, 27, 734$$

2.3. Calculs en python

Lorsque l'on étudie une suite, le premier réflexe doit être de calculer ses premiers termes. Malheureusement, les calculs deviennent rapidement complexes, nous les ferons donc à l'ordinateur ou à la calculatrice. Nous allons utiliser python avec l'éditeur de texte spyder. Les syntaxes Xcas, C, C++ n'en diffèrent que très peu.

Un ordinateur ne connaît pas l'infini, les suites sont donc toujours finies. On définit d'abord une suite avec un seul terme et on ajoute un à un les termes de la suite à notre liste. Dans la plupart des langages, pour ajouter un terme à une suite, on utilise la commande **append**.

Supposons par exemple que je veuille calculer le nombre de lapins dans mon enclos au bout de dix ans. Pour cela je crée une liste que j'initialise à $[1, 1]$, ce sont les termes u_0, u_1 de la suite de Fibonacci.

Dans une boucle, je définis les autres termes de la suite par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Dans l'éditeur de texte, on tape d'abord :

```
1 u=[1,1]
2 for i in range(10):
3     u.append(u[i]+u[i+1])
4 print(u)
```

Puis on exécute le programme, ce qui nous affiche en console :

```
Python 3.5.2 (default, Nov 23 2017, 16:37:01)
Type "copyright", "credits" or "license" for more
information.

IPython 2.4.1 -- An enhanced Interactive Python.
?      -> Introduction and overview of IPython's
features.
%quickref -> Quick reference.
help    -> Python's own help system.
object? -> Details about 'object', use 'object??' for
extra details.
%gui     -> A brief reference about the graphical user
interface.

In [1]:
runfile('/home/garay/Dropbox/Cours1SIA/Suites/Info/Suites_1
.py', wdir='/home/garay/Dropbox/Cours1SIA/Suites/Info')
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144]
```

L'instruction `range(n)` donne les entiers de 0 à $n - 1$:

```
In [2]: 9 in range(10)
Out[2]: True

In [3]: 10 in range(10)
Out[3]: False
```

Supposons maintenant que l'on veuille connaître le nombre de lapins au bout de dix années, c'est-à-dire 120 mois. On demande à python de calculer 120 termes de la suite puis d'afficher `u[120]` :

```
1 u=[1,1]
2 for i in range(121):
3     u.append(u[i]+u[i+1])
4 print(u[120])

In [4]:
runfile('/home/garay/Dropbox/Cours1SIA/Suites/Info/Suites_1.py',
wdir='/home/garay/Dropbox/Cours1SIA/Suites/Info')
8670007398507948658051921

In [5]: float(u[120])
Out[5]: 8.670007398507949e+24
```

Le résultat affiché est peu lisible, j'ai donc demandé à python de l'écrire sous forme décimale en utilisant la commande `float`.

Au cent vingtième mois, le nombre de lapins dans notre enclos est donc du même ordre de grandeur que le nombre de molécules contenues dans un litre d'air !

Exercice 2.4. — Au bout de combien de temps, les lapins de Fibonacci atteindront-ils une densité au mètre carré supérieure à 100 à la surface du globe ?

Réponse. — La Terre possède une superficie d'environ $5 \times 10^{14} m^2$. On cherche donc le plus petit entier n tel que :

$$u_n > 5 \times 10^{16}.$$

L'exécution du programme suivant nous indique qu'en 81 mois c'est-à-dire en moins de 7 ans, les lapins de Fibonacci auront totalement recouvert le globe :

```
1 u=[1,1]
2 i=0
3 while u[i]<5*10**(16):
4     u.append(u[i]+u[i+1])
5     i=i+1
6 print(i)
7 print(float(u[i]))
```

Exercice 2.5. — À l'aide d'un ordinateur calculer le 40ème terme de la suite définie par

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n, \quad u_0 = u_1 = 1.$$

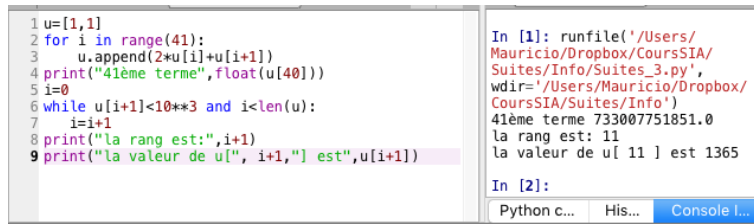
À partir de quel rang, les termes de la suite sont-ils plus grands que 1000 ?

Réponse. —

Le programme ci-dessous nous donne

$$u_{40} = 733\,007\,751\,851$$

puis $n = 11$ et $u_{11} = 1365$.



```

1 u=[1,1]
2 for i in range(41):
3     u.append(2*u[i]+u[i+1])
4 print("41ème terme",float(u[40]))
5 i=0
6 while u[i+1]<10**3 and i<len(u):
7     i=i+1
8 print("la rang est:",i+1)
9 print("la valeur de u[", i+1,"] est",u[i+1])

```

In [1]: runfile('/Users/Mauricio/Dropbox/CoursSIA/Suites/Info/Suites_3.py', wdir='/Users/Mauricio/Dropbox/CoursSIA/Suites/Info')

41ème terme 733007751851.0
la rang est: 11
la valeur de u[11] est 1365

In [2]:

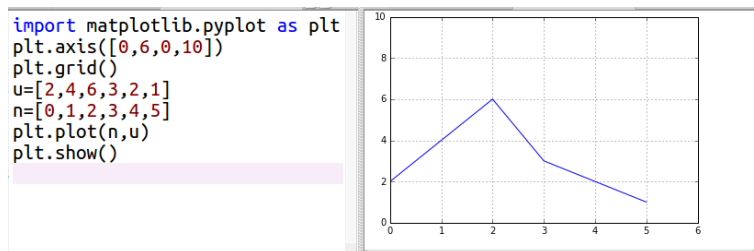
Python c... His... Console l...

2.4. Représentation graphique en python

Pour représenter graphiquement une suite en python, on utilise la bibliothèque matplotlib. Prenons par exemple la suite finie

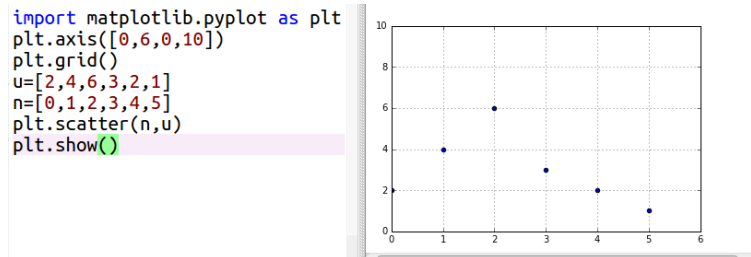
$$u = (2, 4, 6, 3, 2, 1)$$

Par défaut, python relie par des segments les différents termes de la suite :



La première ligne du programme dit que nous allons utiliser la bibliothèque matplotlib et, que nous indiquons par le préfixe `plt` les instructions de cette librairie. La seconde indique la longueur des axes de coordonnées et la troisième demande d'afficher un quadrillage.

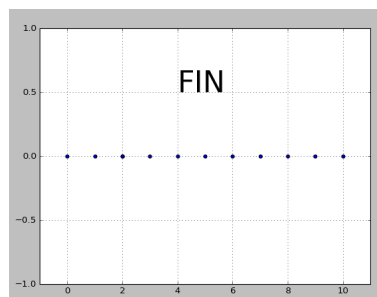
Si on ne veut pas relier les points par des segments, on utilise la commande `scatter` :



On peut aussi faire un affichage dynamique, où les points vont apparaître sur une droite, les uns après les autres. Pour cela, il peut être nécessaire d'effectuer certains réglages, par exemple d'exécuter le programme dans une console externe (execution/configurer).

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 plt.axis([-1,11,-1,1])
3 plt.grid()
4 u=[0,2,4,6,8,10,9,7,5,3,2,1]
5 for k in range(len(u)):
6     plt.scatter(u[k],0)
7     plt.pause(1)
8 plt.text(4,0.5,"FIN",fontsize = 40)
9 plt.show()
```

Ce programme place les nombres pairs de 0 à 10 sur l'axe des abscisses puis les impairs de 9 à 1. Entre chaque point, on marque une pause de 1 seconde. Lorsque tous les points sont tracés, on affiche *FIN* à l'écran :



CHAPITRE 3

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

L'introduction d'un vocabulaire adapté en mathématiques, comme celui que nous avons adopté pour les suites, demande un certain degré de maîtrise. Pour cela, il faut voir comment il s'adapte à des notions que nous connaissons déjà. C'est toujours un peu frustrant, car cela donne l'impression de ne pas avancer et de simplement reformuler de manière complexe des choses parfaitement évidentes ! C'est pourtant une étape nécessaire dans la compréhension. Ce chapitre n'a donc pas d'autre intérêt que de familiariser le lecteur avec le langage des suites et la programmation en python.

Nous allons donc considérer des suites qui nous sont familières depuis l'école primaire comme

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$$

ou encore

$$(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

et nous allons reformuler les problèmes élémentaires de l'école primaire et du collège à l'aide de notre langage : problèmes de proportionnalité, de pourcentages etc.

3.1. Définition par récurrence

Définition 3.1. — Une suite définie par une récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$, $a \in \mathbb{R}$, est dite arithmétique de raison a .

Exemple 3.2. — Les suites des chiffres pairs

$$(0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$$

et impairs

$$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$$

sont toutes deux des suites arithmétiques de raison 2 :

$$u_{n+1} = u_n + 2.$$

Dans le premier cas $u_0 = 0$ alors que dans le second $u_0 = 1$. La suite des entiers

$$(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$$

est arithmétique de raison 1 :

$$u_{n+1} = u_n + 1$$

de premier terme $u_0 = 0$.

Définition 3.3. — Une suite définie par une récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n$, $a \in \mathbb{R}$, est dite géométrique de raison a .

Exemple 3.4. — La suite

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$$

des puissances de 2 est géométrique de raison 2 :

$$u_{n+1} = 2u_n$$

de même que la suite

$$(2, 4, 8, 16, 32, \dots).$$

Dans le premier cas $u_0 = 1$ alors que dans le second $u_0 = 2$. La suite des puissances de 2 :

$$(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

est géométrique de raison 3.

Exemple 3.5. — Les problèmes élémentaires sur les pourcentages peuvent souvent se formuler à l'aide de suites géométriques. Voici par exemple un exercice d'entraînement proposé au concours Kangourou :

« Après deux réductions successives de 20 % chaque fois, un manteau coûte 320 francs. Quel était le prix du manteau avant les réductions ? »

Si on note u_n le prix après n réduction, de sorte que u_0 est le prix initial, on a

$$\begin{aligned}u_1 &= 0,8u_0, \\u_2 &= 0,8u_1 = (0,8)^2u_0.\end{aligned}$$

Nous savons que $u_2 = 320$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}(0,8)^2u_0 &= 320 \\u_0 &= \frac{320}{0,64} \\&= 500 \text{ francs}\end{aligned}$$

3.2. Exercices simples

1. — Calculer les quatre premiers termes des suites arithmétique et géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$.

2. — Après cinq réductions successives de 20 % chaque fois, un manteau coûte 500 Francs. Quel était le prix du manteau avant les réductions ?

3. — Je fais un placement très avantageux à 50% par an avec un montant initial de 1000 euros. Combien aurais-je d'argent au bout de dix ans ?

4. — En 2009, Jean est âgé de vingt ans. Il hérite d'un appartement parisien d'une valeur de 800 000 euros et achète des actions Apple. Sans tenir comptes des dividendes trimestriels qui lui ont été versés, que Jean utilise

pour payer ses impôts, combien Jean a-t-il gagné d'argent en huit ans sachant que le cours des actions Apple a augmenté en moyenne de 35% par an ⁽¹⁾

5. — Au même âge, Grégoire l'ami de Jean obtient un emploi pour lequel il est payé le SMIC, c'est-à-dire environ 1140 euros. Sachant que le SMIC est resté à peu près constant, combien Grégoire aura-t-il gagné d'argent grâce à son travail en vingt ans ? Combien d'années doit-il travailler pour gagner autant que Jean au cours de ces huit années ?

6. — Lorsque Jean se rend à la banque pour récupérer son argent, il se rappelle soudain que sur les conseils d'un ami, il avait acheté des actions Nokia plutôt que des actions Apple. Il a acheté les actions à 37 euros et il les vend 5 euros. En supposant que les actions ont suivi une suite géométrique, estimer la perte de Jean chaque année depuis 2008.

1. — Dans le cas arithmétique

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1 + 3 = 4$$

$$u_2 = 4 + 3 = 7$$

$$u_3 = 7 + 3 = 10$$

Dans le cas géométrique

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1 \times 3 = 3$$

$$u_2 = 3 \times 3 = 9$$

$$u_3 = 3 \times 9 = 27$$

1. Les cours de l'action Apple depuis 2009 sont : 11,76; 28,2; 48,1; 60; 75; 77; 109; 97; 120.

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

n=	0	1	2	3	4	5	6
suite arithmétique	1	4	7	10	13	16	19
suite géométrique	1	3	9	27	81	243	729

2. — 1525,87 euros.

3. — Si chaque année je multiplie par 1,5, cela signifie qu'au bout de deux ans, je dois multiplier mon placement initial par $(1,5)^2$:

$$\begin{aligned} u_2 &= (1,5) \times u_1 \\ &= (1,5)^2 \times u_0 \\ &= 2\,250 \end{aligned}$$

car $u_0 = 1000$. De même,

$$\begin{aligned} u_3 &= (1,5)u_2 \\ &= (1,5)^2u_1 \\ &= (1,5)^3 \times u_0 \\ &= 3\,375. \end{aligned}$$

Au bout de dix ans, j'aurais donc :

$$\begin{aligned} u_{10} &= \underbrace{1,5 \times 1,5 \times 1,5 \times \cdots \times 1,5}_{10 \text{ fois}} \times 1\,000 \\ &= (1,5)^{10} \times 1\,000 \\ &\approx 57\,665 \text{ euros} \end{aligned}$$

On le voit effectuer n multiplications par 1,5 revient à multiplier par $(1,5)^n$, c'est la définition de la puissance.

4. — L'argent C_n dont dispose Jean au bout de n -années est une suite géométrique de raison

$$q = 1 + 35\% = 1,35$$

et de premier terme

$$C_0 = 800\,000.$$

Au bout de 8 ans, il a donc

$$C_8 = 800\,000 \times (1,35)^8 \approx 8\,825\,923 \text{ euros } 45\text{cents}.$$

Il a gagné plus de 8 millions d'euros.

5. — L'argent A_n gagné au bout de n années définit une suite arithmétique de raison

$$12 \times 1140 = 13\,680.$$

On a donc

$$A_n = 13\,680n$$

et par suite

$$A_{20} = 13\,680 \times 8 = 109\,440 \text{ euros}$$

soit environ dix fois moins que son ami Jean. Pour avoir

$$A_n = 8\,025\,923$$

il devra attendre

$$\frac{800\,000 \times (1,35)^8}{13\,680} = 645,17 \dots \text{ années}.$$

Il a donc intérêt à vivre vieux.

6. — Jean possède

$$800\,000 \times \frac{5}{37} \approx 108\,108.$$

Si son argent a suivi une suite géométrique de raison q , on a

$$800\,000q^8 = 108\,108$$

$$q^8 = \frac{108\,108}{800\,000}$$

$$q = \sqrt[8]{\frac{108\,108}{800\,000}} \approx 0,78$$

Il a donc perdu chaque année environ 22% de son bien.

3.3. Intégration des suites arithmétiques

Comme pour la suite de Fibonacci, on peut se poser la question d'exprimer la suite en fonction de n et non en fonction du terme précédent, ce que nous appellerons *intégrer la récurrence*.

Les exercices que nous venons faire montrent que l'on peut intégrer les récurrences qui définissent les suites arithmétiques et géométriques.

Intégrer une récurrence permet de calculer les termes de la suite pour des grandes valeurs. Par exemple, si je ne dépense pas mon argent de poche, qui est de deux euros par mois, combien aurais-je d'argent au bout de 50 mois ? La réponse est évidente si l'on gagne deux euros par mois, en 50 mois on gagne :

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + \cdots + 2}_{50 \text{ fois}} = 2 \times 50 = 100 \text{ euros}$$

Additionner 50 fois le nombre 2 ou le multiplier par 50 revient bien évidemment au même. Intégrer une suite arithmétique consiste donc à remplacer un grand nombre d'additions par une multiplication :

Proposition 3.6. — Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , on a :

$$u_n = nr + u_0$$

Si je reprends mon exemple, on a $u_0 = 0$, $r = 2$ donc

$$u_{50} = 50 \times 2 + 0 = 100$$

Comme quoi en mathématiques, on peut dire des choses simples de manière bien compliquée ! Mais vous verrez, le formalisme est utile, même si au début cela peut sembler idiot voire snob car que signifie au fond cette formule ? Rien d'autre que le passage de l'addition à la multiplication.

Intégrer la formule de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + r$$

permet de calculer directement la valeur de la suite :

$$\begin{aligned}
 u_n &= r + u_{n-1} \\
 &= r + r + u_{n-2} \\
 &= r + r + r + u_{n-3} \\
 &\dots\dots \\
 &= \underbrace{r + r + r + \dots + r}_{n \text{ fois}} + u_0
 \end{aligned}$$

Cette opération nous semble ici évidente, mais si l'on se ramène à l'enfance, on se rappelle peut-être que pour certains d'entre-nous le passage de l'addition à la multiplication semblait une complication bien inutile. La formule

$$u_n = nr + u_0$$

n'en est qu'une traduction mathématique.

Prenons une suite un peu plus difficile. Si j'ai initialement 5 euros en poche et qu'un ami me fait cadeau de 3 euros par mois, au bout de 77 mois j'aurais :

$$u_{77} = 77 \times 3 + 5 = 236 \text{ euros.}$$

Ici la raison vaut $r = 3$ et le premier terme vaut $u_0 = 5$.

Inversement, si je connais deux termes d'une suite arithmétique ou un terme et la raison, je retrouve facilement son premier terme et sa raison :

Exercice 3.7. — Que vaut le premier terme de la suite arithmétique de raison 3 et de terme $u_5 = 12$?

Réponse. — On a

$$u_n = 3n + u_0$$

donc pour $n = 5$:

$$12 = 3 \times 5 + u_0$$

donc $u_0 = -3$.

Exercice 3.8. — Que valent le premier terme et la raison de la suite arithmétique telle que $u_5 = 12$, $u_7 = 20$?

Réponse. — On a

$$u_7 = u_5 + 2r$$

En remplaçant u_5 et u_7 par leurs valeurs, on trouve

$$r = 4.$$

On écrit ensuite

$$u_n = nr + u_0$$

avec $n = 5$, $r = 4$. Ce qui nous donne

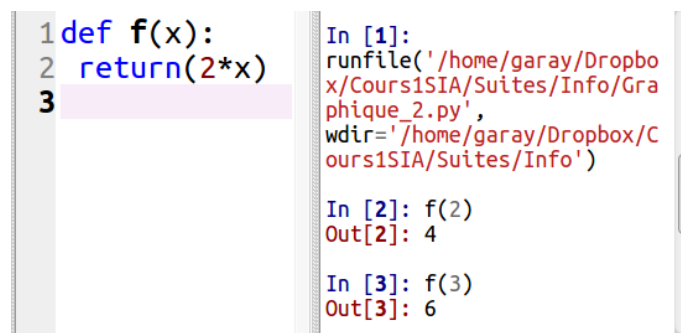
$$12 = 5 \times 4 + u_0$$

Donc $u_0 = -8$.

3.4. Notion de fonction en python

Nous allons construire une fonction qui permet de résoudre les exercices précédents de manière systématique. D'abord quelques mots sur la notion de fonction en python. Pour définir une fonction, on utilise la commande `def` et `return` pour ce que la fonction renvoie. Voici la programmation de la fonction :

$$x \mapsto 2x$$



```

1 def f(x):
2     return(2*x)
3
In [1]: runfile('/home/garay/Dropbox/Cours1SIA/Suites/Info/Graphique_2.py',
            wdir='/home/garay/Dropbox/Cours1SIA/Suites/Info')

In [2]: f(2)
Out[2]: 4

In [3]: f(3)
Out[3]: 6

```

Une fois la fonction définie, je peux l'utiliser dans la console ou dans le programme. À chaque fois que l'interpréteur rencontre $f()$ il le remplace par

$$x \mapsto 2x.$$

Considérons maintenant une suite de raison r dont nous connaissons un terme u_n . On a

$$u_n = nr + u_0$$

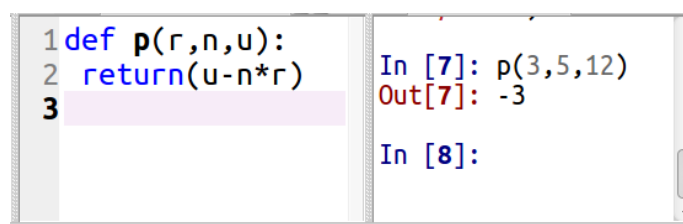
donc $u_0 = u_n - nr$. Ce qui nous donne une fonction

$$p : (r, n, u_n) \mapsto u_n - nr.$$

Par exemple, si (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de terme $u_5 = 12$, on a

$$\begin{aligned} u_0 &= 12 - 5 \times 3 \\ &= -3 = p(3, 5, 12) \end{aligned}$$

En python, cela s'écrit ainsi :



```

1 def p(r,n,u):
2   return(u-n*r)
3
In [7]: p(3,5,12)
Out[7]: -3

In [8]:

```

Construisons maintenant une fonction pour résoudre le second problème. On a deux termes u_n et u_{n+k} . On écrit :

$$u_{n+k} = u_n + kr$$

donc la raison vaut :

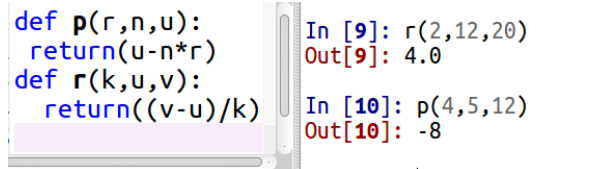
$$r = \frac{u_{n+k} - u_n}{k}$$

Ce qui nous donne une première fonction :

$$r : (u, v, k) \mapsto \frac{v - u}{k}$$

Puis nous utilisons la fonction p pour trouver u_0 . Voici la résolution du second exercice en utilisant python.

Nous avons construit les fonctions p et r , nous pouvons les utiliser à tous les problèmes de ce type :



```
def p(r,n,u):
    return(u-n*r)
def r(k,u,v):
    return((v-u)/k)
```

In [9]: r(2,12,20)
Out[9]: 4.0

In [10]: p(4,5,12)
Out[10]: -8

3.5. Intégration des suites géométriques

Le cas des suites géométriques est à peu près identique. Dans le cas arithmétique, on constatait qu'ajouter n fois un même terme r revenait à lui ajouter nr , dans le cas géométrique au lieu de passer de l'addition à la multiplication, on passe de la multiplication à la puissance.

Supposons par exemple, que partant de 50 centimes d'euro, je double mes économies chaque mois. Combien aurais-je d'argent à la fin de l'année? La réponse est simple :

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{12 \text{ fois}} \times 0,5 = 2^{11} = 2\,048 \text{ euros}$$

Cette fois-ci la répétition d'une multiplication est la même chose que d'élever notre nombre à la puissance correspondante. C'est le contenu du résultat suivant :

Proposition 3.9. — Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , on a :

$$u_n = q^n u_0$$

On peut reproduire les mêmes exercices que nous avons fait dans le cas arithmétique. Mais il y a cependant une différence de taille que nous allons maintenant explorer.

3.6. Suites géométriques et logarithmes

Si l'on se donne une suite géométrique, il est facile de calculer une valeur de la suite. Considérons par exemple, la suite (2^n) . On calcule rapidement

$$2^{12} = 4 \times 1024 = 4088.$$

L'opération inverse est nettement plus complexe, mais elle est programmée sur les calculatrices. La suite

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto q^n$$

porte le nom *d'exponentielle discrète de base q* . Son inverse s'appelle le *logarithme* en base q .

Exercice 3.10. — Calculer les logarithmes en base 2 des nombres suivants :

$$2, 16, 32, 1024, 512, 1/2, 1/4, 1.$$

Réponse. —

$$1, 4, 5, 10, 9, -1, -2, 0.$$

Le calcul approché des logarithmes est un des problèmes fondamentaux de l'analyse élémentaire. On note $\log_q x$ le logarithme en base q de x . Par exemple

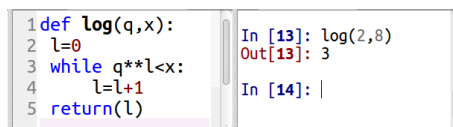
$$\log_2 8 = 3, \log_2 32 = 5, \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

La dernière égalité signifie que

$$2^{1/2} = \sqrt{2}$$

qui est la définition de la puissance fractionnaire.

Voici un programme simple pour obtenir ce logarithme lorsque la valeur est entière. On calcule les puissance de q jusqu'à trouver un nombre qui dépasse celui annoncé :



```

1 def log(q,x):
2     l=0
3     while q**l<x:
4         l=l+1
5     return(l)

In [13]: log(2,8)
Out[13]: 3

In [14]: |

```

Exercice 3.11. — Après sa mauvaise affaire avec Nokia, Jean ne dispose plus que de 100 000 euros. D'après son ami expert financier, le cours de l'action Apple continuera à augmenter de 35% par an. Si Jean investit 50 000 euros et si c'est bien le cas dans combien d'années sera-t-il millionnaire ?

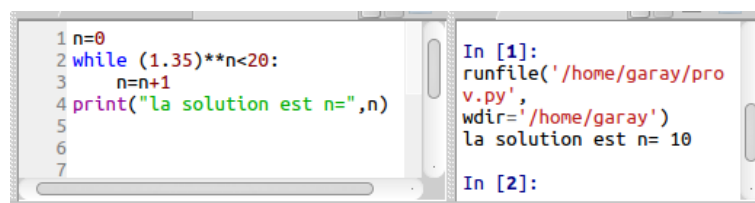
Réponse. — *L'argent que possède Jean chaque année est donné par la suite géométrique*

$$u_n = (1,35)^n \times 50\,000$$

On doit donc résoudre l'inéquation

$$(1,35)^n \times 50\,000 \geq 1\,000\,000 \quad (1,35)^n \geq \frac{1\,000\,000}{50\,000} = 20$$

Le programme suivant nous donne $n = 10$:



```

1 n=0
2 while (1.35)**n<20:
3     n=n+1
4     print("la solution est n=",n)
5
6
7

```

```

In [1]:
runfile('/home/garay/pro
v.py',
wdir='/home/garay')
la solution est n= 10

In [2]:

```

Jean pourrait donc être millionnaire si l'action continue à augmenter comme elle l'a fait ces dix dernières années, mais son expérience lui dit que c'est un pari dont l'issue est très peu sûre...

3.7. Notion de système dynamique

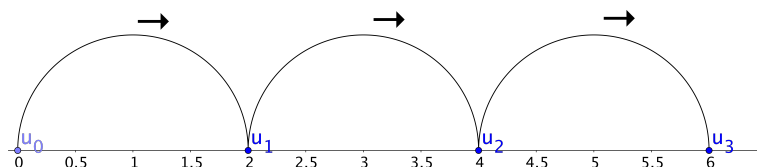
Nous considérons maintenant une récurrence arithmétique ou géométrique et nous étudions le comportement de la suite en fonction de la donnée initiale. Donc la relation de récurrence est fixée mais pas son terme initial u_0 . L'ensemble des éléments de la suite (u_n) construits à partir de cette donnée initiale s'appelle *l'orbite de u_0* .

Une suite arithmétique de raison positive grandit de plus en plus quelle que soit le terme initial u_0 . Si, dans sa représentation dynamique, on imagine notre suite comme une puce qui se déplace sur un axe alors pour une suite arithmétique la puce s'en va vers la droite. Si la raison est négative, elle se déplace vers la gauche. Le comportement qualitatif ne dépend pas de la donnée initiale.

Prenons, par exemple, la récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

La représentation dynamique de cette suite est la suivante :

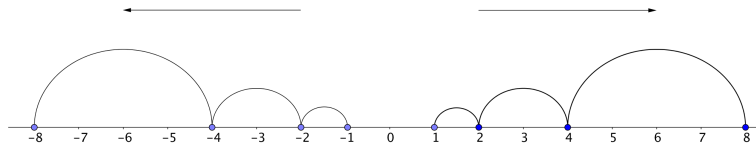


Les termes de la suite se « décalent » vers la droite et « partent à l'infini ».

Passons au cas des suites géométriques. Plusieurs comportements sont possibles. Voici par exemple la dynamique de la récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n$$

avec les conditions initiales $u_0 = \pm 1$. Les termes de la suite s'éloignent de l'origine et « partent vers l'infini ».

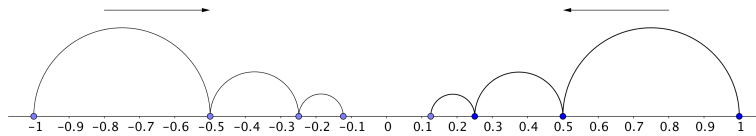


En fait si la condition initiale est positive l'orbite part à l'infini vers la droite, si elle est négative elle part vers la gauche et, si elle est nulle la suite reste constante égale à 0.

Considérons maintenant la dynamique de la récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$$

avec les conditions initiales $u_0 = \pm 1$. Alors que dans l'exemple précédent, les termes devenaient de plus en plus grands, maintenant les termes de la suite s'approchent de l'origine :



Qualitativement, le résultat ne dépend que du signe de la condition initiale : dans un cas on s'approche de 0 par valeurs positives et dans l'autre cas par valeurs négatives.

Dans les deux cas, l'origine reste fixe : si $u_0 = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout n . On dit que c'est un *point fixe*. Dans le premier exemple, on dit que l'origine est un *point fixe répulsif*, dans le second on dit que c'est un *attracteur*.

CHAPITRE 4

SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

4.1. Approche expérimentale

Nous avons étudié deux cas très simples de suites : les suites arithmétiques et géométriques. Nous allons maintenant les combiner et étudier les récurrences affines. C'est le premier cas où notre formalisme, nous permet de dépasser les connaissances de l'arithmétique élémentaire.

Nous avons considéré les suites géométriques définies par des récurrences linéaires de la forme

$$u_{n+1} = au_n$$

et des suites arithmétiques définies par des récurrences de la forme

$$u_{n+1} = u_n + b$$

Nous pouvons considérer plus généralement des suites définies par des récurrences affines

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Une telle suite est appelée *arithmético-géométrique*.

Commençons par un exemple. Supposons que l'on se donne la suite $u = (u_n)$ définie par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 3, \quad u_0 = 0$$

et que l'on demande de calculer u_{100} . Nous pouvons le faire à l'ordinateur. En utilisant la notion de fonction, on peut d'ailleurs directement donner la formule de

récurrance et demander à l'ordinateur d'effectuer le calcul. On procède ainsi. On définit la fonction par récurrence :

```
1 def u(n):  
2     if n==0:  
3         return(0)  
4     else:  
5         return(2*u(n-1)+3)  
6  
7  
8
```

On peut ensuite utiliser la fonction u en mode console :

```
In [1]:  
runfile('/home/garay/prov.py',  
wdir='/home/garay')  
  
In [2]: u(1)  
Out[2]: 3  
  
In [3]: u(2)  
Out[3]: 9  
  
In [4]: u(100)  
Out[4]:  
3802951800684688204490109616125  
  
In [5]: float(u(100))  
Out[5]: 3.802951800684688e+30
```

L'ordinateur sera très vite dépassé par la taille des nombres en question. Heureusement, on peut intégrer la relation de récurrence.

La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique, c'est une combinaison des deux. Calculons ses premiers termes :

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n =$	0	3	9	21	45	93	189	381

Très rapidement la multiplication semble l'emporter sur l'addition

$$u_{n+1} \approx 2u_n$$

dès que n est assez grand. Ainsi lorsque n grandit la suite (u_n) s'approche d'une suite géométrique (v_n) de raison 2 or ces suites sont toutes de la forme :

$$v_n = C \times 2^n.$$

Pour trouver la valeur de la constante C , nous allons demander à l'ordinateur de calculer $u_n/2^n$ pour des valeurs allant jusqu'à dix :

```

1 def u(n):
2     if n==0:
3         return(0)
4     else:
5         return(2*u(n-1)+3)
6 def v(n):
7     return(u(n)/2**(n))
8 for i in range(15):
9     print(v(i))
10
11
12

```

Output values (v(i) for i from 0 to 15):

0.0
1.5
2.25
2.625
2.8125
2.90625
2.953125
2.9765625
2.98828125
2.994140625
2.9970703125
2.99853515625
2.999267578125
2.9996337890625
2.99981689453125

Il semble donc que la suite s'approche de la valeur 3 ce qui nous dit que grosso modo

$$u_n \approx 2^n \times 3.$$

Calculons maintenant $u_n - 2^n \times 3$, surprise c'est la suite constante égale à -3 :

```

1 def u(n):
2     if n==0:
3         return(0)
4     else:
5         return(2*u(n-1)+3)
6 def v(n):
7     return(u(n)/2**(n))
8 def w(n):
9     return(u(n)-3*2**(n))
10 for i in range(15):
11     print(w(i))
12

```

x/Cours1SIA/Suites/Info'

)

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

-3

Nous avons trouvé expérimentalement que

$$u_n = 2^n \times 3 - 3$$

Vérifions que cette suite vérifie la formule de récurrence annoncée

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 2^{n+1} \times 3 - 3 \\
 u_n &= 2^n \times 3 - 3 \\
 u_{n+1} - 2u_n &= -3 + 6 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a bien $u_0 = 0$.

4.2. Le problème à l'envers

Reprenons le calcul que nous venons d'effectuer en partant de la fin. Nous avons une suite de la forme :

$$u_n = \alpha q^n + \beta$$

On a

$$u_{n+1} = \alpha q^{n+1} + \beta$$

donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - qu_n &= \\ u_{n+1} &= qu_n + \beta - q\beta \end{aligned}$$

Ainsi toute suite arithmético-géométrique est de cette forme. Nous avons démontré la

Théoreme 4.1. — *Toute suite arithmético-géométrique est somme d'une suite géométrique et d'une constante. Plus précisément si (u_n) vérifie la relation de récurrence affine :*

$$u_{n+1} = au_n + b$$

alors

$$u_n = \alpha q^n + \beta$$

avec $u_0 = \alpha + \beta$ et $r = \beta - \beta q$.

Il est bien entendu inutile de se rappeler d'une telle formule. Nous allons maintenant tenter de comprendre géométriquement ce théorème.

4.3. Dynamique d'une suite affine

Une suite définie par une récurrence affine

$$u_{n+1} = au_n + b$$

se comporte asymptotiquement comme une suite géométrique de raison a lorsque $|a| > 1$. Mais que se passe-t-il sinon ?

Nous avons vu que la dynamique d'une suite nous donne des informations sur cette suite, c'est un peu son empreinte digitale. Or une suite géométrique possède l'origine comme point fixe, Ccelui-ci est répulsif si la valeur absolue de la raison est supérieure à 1 et attractif si elle est inférieure à 1.

Cherchons les points fixes d'une suite définie par une récurrence affine. C'est donc une suite constante

$$u_{n+1} = u_n = x$$

vérifiant la récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

On en déduit *l'équation du point fixe* à savoir :

$$x = ax + b$$

Ce qui nous donne :

$$x = \frac{b}{1-a}$$

Plaçons nous à nouveau dans le cas d'une suite arbitraire (u_n) vérifiant la récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Déplaçons l'origine des coordonnées au point fixe. Pour cela, nous introduisons la suite

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}.$$

De sorte que lorsque le point fixe de (v_n) est maintenant l'origine. Traduisons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b$$

à l'aide de la suite (v_n) . Pour cela, nous exprimons u_{n+1} et u_n en fonction de v_{n+1} et v_n :

$$u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{b}{1-a}u_n = v_n + \frac{b}{1-a}$$

La relation de récurrence s'écrit

$$v_{n+1} + \frac{b}{1-a} = a \left(v_n + \frac{b}{1-a} \right) + b$$

$$v_{n+1} + \frac{b}{1-a} = av_n + \frac{ab}{1-a} + b$$

$$v_{n+1} + \frac{b}{1-a} = av_n + \frac{ab + b(1-a)}{1-a}$$

$$v_{n+1} = av_n$$

La suite (v_n) est géométrique. Autrement dit une suite arithmético-géométrique est obtenue à partir d'une suite géométrique par translation de l'origine au point fixe.

Nous avons dégagé la méthode suivante d'intégration de la récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. On résout l'équation du point fixe $x = ax + b$.
2. On a $u_n = a^n(u_0 - x) + x$.

Remarquez que la formule donne bien $u_0 = x$ pour point fixe.

Exercice 4.2. — On se donne la suite $u = (u_n)$ définie par :

$$u_{n+1} = 3u_n + 30, \quad u_0 = 0$$

et l'on demande de calculer u_{100} .

Réponse. — On cherche le point fixe. Il vérifie l'équation

$$x = 3x + 30.$$

Ce qui nous donne $x = -15$. La suite

$$v_n = u_n + 15$$

est géométrique de raison 3 et $v_0 = 15$. Ce qui nous donne

$$v_n = 3^n \times 15$$

et finalement

$$u_n = 3^n \times 15 - 15$$

Vérifions les deux premières valeurs, on a bien :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 30.$$

Nous avons donc

$$u_{100} = 3^{100} \times 15 - 15$$

On voit que le terme constant de la formule est négligeable. Si on utilise l'approximation $3^2 \approx 10$ et $15 \approx 10$, on obtient

$$u_{100} \approx 10^{51},$$

plus que le carré du nombre d'Avogadro.

4.4. Exercices de synthèse

Dans chacun des cas suivants on demande

- 1) Calculer le points fixe et donner sa nature (attractif, répulsif?)
- 2) Représenter l'orbite avec $u_0 = 3$.
- 3) Intégrer la récurrence.
- 4) A partir de quelle valeur de n , l'orbite de $u_0 = 3$ sera-t-elle à une distance inférieure à 10^{-3} du point fixe s'il est attractif et supérieur à 10^3 s'il est répulsif.

1. —

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

2. —

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

3. —

$$u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 1$$

Réponses

1. — Le point fixe est

$$x = 2$$

il est attractif car la raison vaut $1/2$. Ces suites s'intègrent sous la forme

$$u_n = \alpha 2^{-n} + 2$$

Pour $u_0 = 3$, on a $\alpha = 1$. On doit résoudre

$$2^{-n} \leq 10^{-3} \iff -n \leq \log_2(10^{-3}) = -9,96 \dots$$

donc $n \geq 10$.

2. — Le point fixe est

$$x = -1$$

il est répulsif car la raison vaut 2. Ces suites s'intègrent sous la forme

$$u_n = \alpha 2^n - 1$$

Pour $u_0 = 3$, on a $\alpha = 4$ donc

$$u_n = 2^{n+2} - 1$$

On doit résoudre

$$2^{n+2} \geq 10^3 \iff n + 2 \geq \log_2(10^3) = 9,96 \dots$$

On doit donc avoir $n \geq 8$.

3. — Le point fixe est

$$x = 3/4,$$

il est attractif. Ces suites s'intègrent sous la forme

$$u_n = \alpha \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \frac{9}{4}$$

donc

$$\frac{9}{4} 3^{-n} \leq 10^{-3} \iff -n \leq \log_3\left(\frac{4}{9} 10^{-3}\right) = -7,02 \dots$$

On doit donc avoir $n \geq 8$.

CHAPITRE 5

RÉCURRENCES LINÉAIRES D'ORDRE 2

Nous avons d'abord étudié les suites géométriques et arithmétiques puis nous avons vu que l'étude des suites arithmético-géométriques –définies par des récurrences affines– se ramène au cas géométrique par une translation. Nous étudions maintenant à nouveau les récurrences linéaires, mais cette fois-ci d'ordre 2. Un exemple significatif d'une telle récurrence est donné par celle de Fibonacci.

5.1. Représentation graphique

Reprenons notre suite de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Celle-ci est définie par la récurrence ;

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Comme toutes les suites, nous connaissons deux représentations graphiques l'une dynamique sur la droite et l'autre statique dans le plan. Nous introduisons maintenant une représentation dynamique dans le plan.

Pour cela, considérons les points

$$p_n = (u_n, u_{n+1}).$$

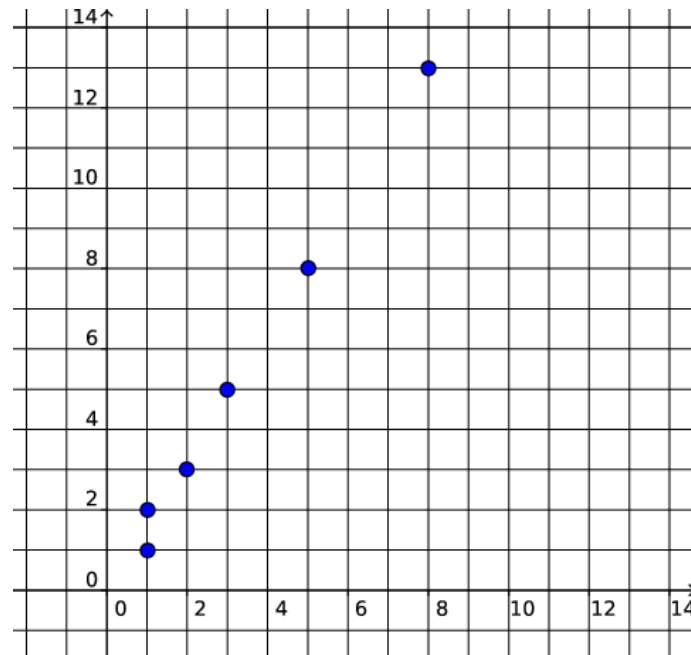
La récurrence nous fait passer d'un point p_n à un point p_{n+1} :

$$(1, 1) \mapsto (1, 2) \mapsto (2, 3) \mapsto (3, 5) \mapsto (5, 8) \mapsto (8, 13) \mapsto (13, 21)$$

et plus généralement

$$(u_n, u_{n+1}) \mapsto (u_{n+1}, u_{n+2}) = (u_{n+1}, u_{n+1} + u_n)$$

Exercice 5.1. — Représenter graphiquement les six premiers termes de la suite de Fibonacci.



Comme précédemment l'ensemble de ces points s'appelle la *trajectoire du point* p_0 ou encore *l'orbite du point* p_0 . En considérant les couples de valeurs d'une suite, nous avons transformé la récurrence d'ordre 2 en une récurrence d'ordre 1. Notre puce ne se déplace plus sur une droite comme précédemment, mais sur un plan.

Exercice 5.2. — On considère la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_n.$$

Représenter dans le plan la trajectoire de $p_0 = (-1, 1)$, c'est-à-dire la représentation graphique des termes de la suite

$$u_{n+2} = 2u_n$$

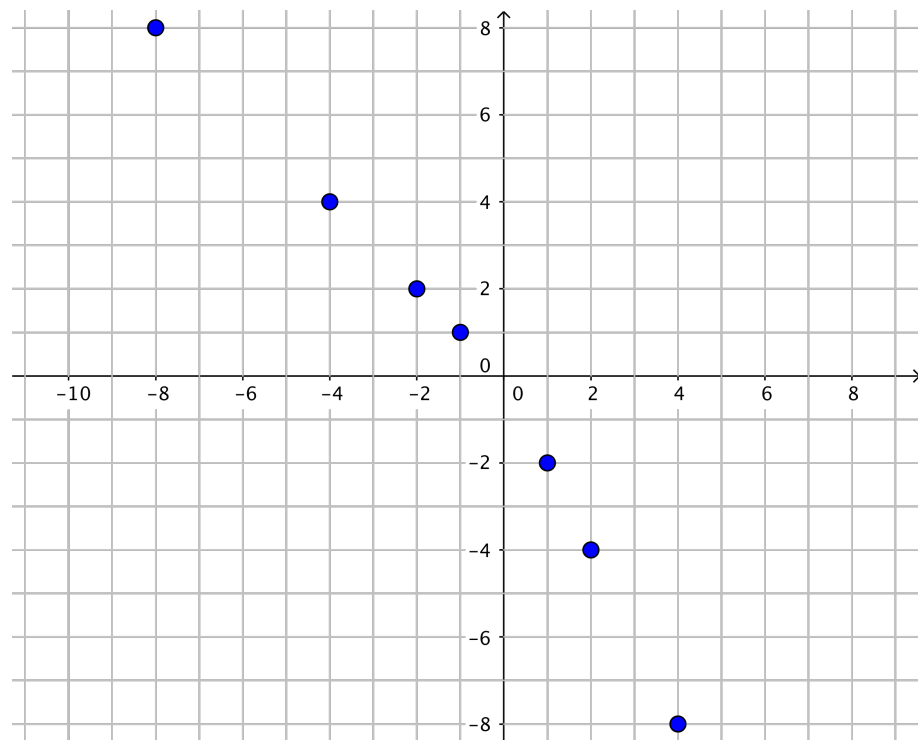
avec $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$.

Réponse. — La suite est donnée par

$$-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8, \dots$$

Les 6 premiers points de sa représentation graphique sont donc

$$(-1, 1) \mapsto (1, -2) \mapsto (-2, 2) \mapsto (2, -4) \mapsto (-4, 4) \mapsto (4, -8)$$



5.2. Étude expérimentale des suites de Fibonacci

Nous considérons la relation de récurrence de Fibonacci

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

mais à présent la condition initiale n'est pas forcément

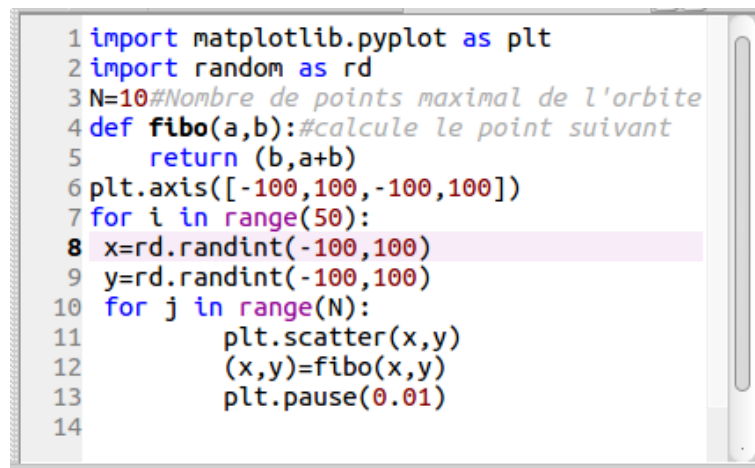
$$u_0 = 1, u_1 = 1.$$

Bien au contraire, nous souhaitons étudier expérimentalement le comportement d'une telle suite en fonction des conditions initiales, comme nous l'avons fait pour les suites géométriques.

Pour cela il est pratique d'écrire un petit script python qui affiche pas à pas les différentes trajectoires en choisissant une condition initiale au hasard dans un carré.

La fonction suite construit la liste des 10 premiers éléments de la suite Fibonacci avec une condition initiale donnée.

Nous utilisons la bibliothèque random qui nous permet de choisir deux nombres entiers au hasard dans l'intervalle $[-100, 100]$. Ils seront notre condition initiale.

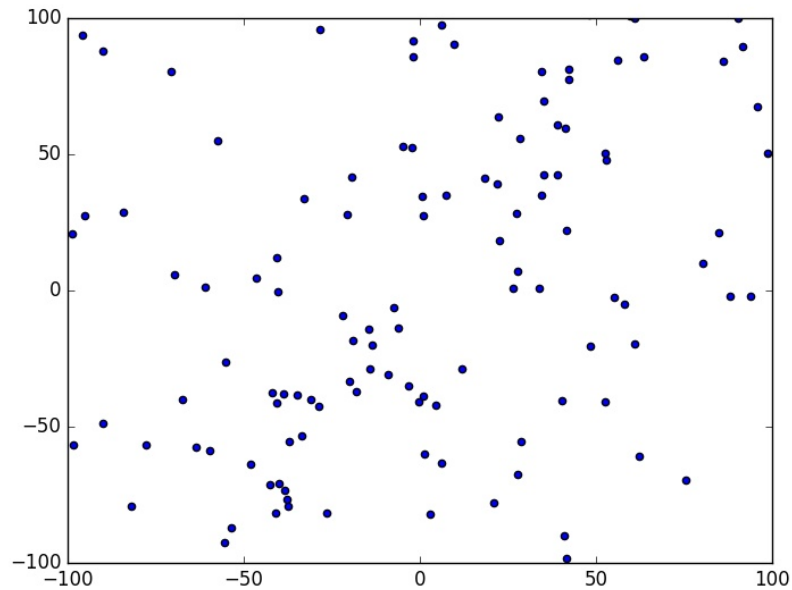


```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import random as rd
3 N=10#Nombre de points maximal de l'orbite
4 def fibo(a,b):#calcule le point suivant
5     return (b,a+b)
6 plt.axis([-100,100,-100,100])
7 for i in range(50):
8     x=rd.randint(-100,100)
9     y=rd.randint(-100,100)
10    for j in range(N):
11        plt.scatter(x,y)
12        (x,y)=fibo(x,y)
13        plt.pause(0.01)
14

```

Le résultat est décevant, on aperçoit un amas d'orbites :



Quand on regarde une figure, il est important de comprendre ce qu'elle représente et de moduler les paramètres pour mettre en évidence certains phénomènes.

Nous savons que la suite de Fibonacci grandit très rapidement ce qui signifie que la plupart des trajectoires de notre figure ne comportent que très peu de points : elles s'échappent rapidement du carré. Supposons par exemple que l'ordinateur ait choisi la condition initiale $x = 20$, $y = 50$. Il placera d'abord le point $(20, 50)$ puis calculera le point suivant $(50, 70)$ qu'il placera à son tour. Le calcul suivant lui donnera $(70, 120)$ qui n'est déjà plus sur la figure !

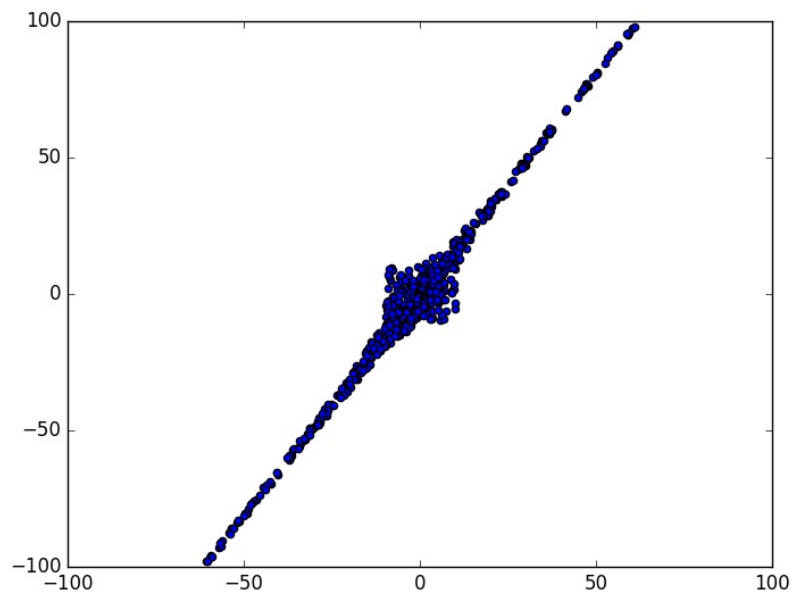
Ce qui explique que nous observons simplement un amas de points qui sont grosso modo les conditions initiales choisies. Afin de pouvoir réellement observer des orbites, nous choisissons maintenant des conditions initiales dans un petit carré. Nous remplaçons simplement la ligne de commande

```
x = rd.randint(-100, 100)
```

par

```
x = rd.randint(-100, 100)/10
```

Maintenant les données initiales sont choisies dans un carré de côté dix fois plus petit que ne l'est le dessin. Cette légère modification nous amène à constater un résultat surprenant :



Nous voyons que les orbites certes partent vers l'infini, mais elles ne le font pas arbitrairement : elles s'agglutinent le long d'un axe dont la pente est proche de 1,5. Nous verrons que la pente n'est autre que le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Au centre de la figure, nous apercevons les points choisis dans le petit carré des conditions initiales. La récurrence prend notre carré et l'aplatit tel un pâtissier le long de cette droite dans un sens et dans l'autre.

Maintenant que ce phénomène est mis en évidence, il s'agit pour nous de le comprendre et de voir dans quelle mesure celui-ci dépend ou non de l'exemple particulier que nous avons choisi.

5.3. Conceptualiser pour simplifier

Conceptualiser permet de traiter des exemples plus simples : nous avons incorporé la suite de Fibonacci dans un cadre suffisamment général, nous pouvons étudier des exemples plus simples de récurrence d'ordre 2.

Partons des suites géométriques de raison 2 :

$$u_{n+1} = 2u_n$$

On a bien sûr

$$u_n = 2^n u_0.$$

Mais la relation de récurrence d'ordre 1 entraîne une récurrence d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = 4u_n.$$

Nous allons étudier cette récurrence en détail.

Exercice 5.3. — Calculez les 5 premiers éléments de l'orbite de $(1, 1)$ et représentez-les graphiquement. Cette suite est-elle géométrique ?

Réponse. — *Le suite associée est*

$$u = (1, 1, 4, 4, 16, 16, 64, 64, \dots).$$

Ce n'est pas une suite géométrique, on passe de u_0 à u_1 en multipliant par 1 et de u_1 à u_2 en multipliant par 2.

L'orbite du point p_0 est constituée de points de la forme

$$p_0 = (1, 1)$$

$$p_1 = (1, 4)$$

$$p_2 = (4, 4)$$

$$p_3 = (4, 16)$$

$$p_4 = (16, 16)$$

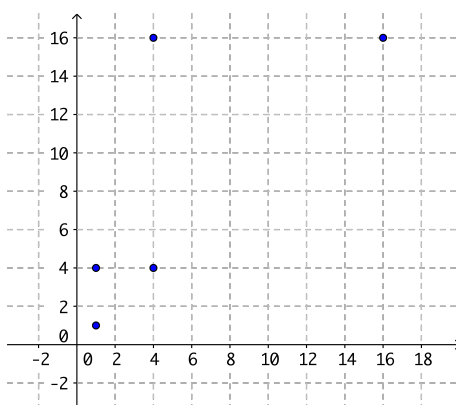
$$p_5 = (16, 64)$$

Dans le cas général, on a pour n pair

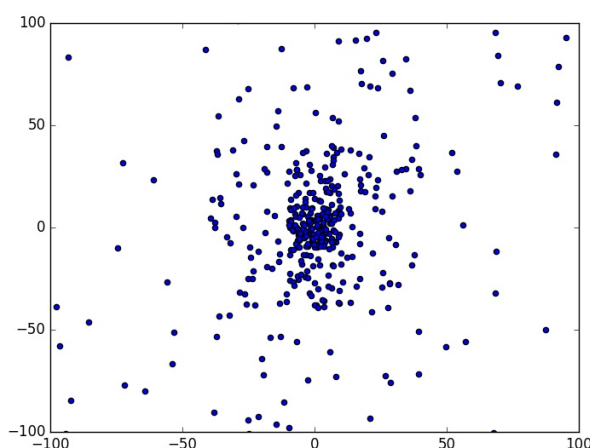
$$p_n = (2^n, 2^n)$$

$$p_{n+1} = (2^n, 2^{n+1})$$

La représentation graphique de la suite est :



À quoi ressemble plus généralement la représentation graphique associée à cette récurrence ? Constate-t'on à nouveau un phénomène rouleau à pâtisserie. Eh bien non :



Cette fois-ci le dessin ressemble à une explosion les points initialement proche de l'origine en sont rapidement éjectés. Essayons de comprendre où se trouve notre suite (2^n) et ses multiples dans ce dessin. À cette suite, on associe les points

$$(1, 2), (2, 4), (4, 8), (8, 16), (16, 32)$$

et plus généralement :

$$p_n = (2^n, 2^{n+1})$$

Ces points ont la particularité d'être situés sur la droite d'équation

$$y = 2x.$$

Exercice 5.4. — Soit (u_n) une suite vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Montrer que si (u_n) est géométrique alors les points de sa représentation graphique sont alignés.

Réponse. — On a

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Le point associé

$$p_n = (u_n, qu_n)$$

appartient à la droite d'équation $y = qx$.

Partons par exemple du point

$$p_0 = (-1, -2)$$

on obtient l'orbite

$$(-1, -2), (-4, -8), (-8, -16), \dots$$

C'est à nouveau une suite de points associée à une suite géométrique de raison 2 :

$$(-1, -2, -4, -8, -16, -32, \dots)$$

Existe-t-il d'autres droites invariantes passant par l'origine ?

Prenons une condition initiale

$$p_n = (a, b) = (u_n, u_{n+1})$$

le point suivant de l'orbite est

$$p_{n+1} = (u_{n+1}, u_{n+2}) = (u_{n+1}, 4u_n)$$

si ces deux points sont sur une même droite d'équation

$$y = ax$$

cela signifie que chacun d'entre eux vérifie l'équation de la droite, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n \\ 4u_n &= au_{n+1} \end{aligned}$$

d'où :

$$4u_n = a^2u_n$$

et $a^2 = 4$. Donc on a deux droite invariantes d'équation

$$y = \pm 2x.$$

5.4. Exercices

Énoncés

1. — On considère la récurrence

$$u_{n+2} = 4u_n$$

Calculer l'orbite du point $p_0 = (1, -2)$.

2. — Quelles sont les suite géométriques vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 9u_n$?

3. — Quelles sont les suite géométriques vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+2} = au_n$?

4. — Quelles sont les suite géométriques vérifiant une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n$$

Réponses

1. — On a

$$(1, -2), (4, -8), (-8, 16), (16, -32), \dots$$

Ce sont les points associés une suite géométrique de raison -2 :

$$(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$$

2. — Supposons (u_n) géométrique :

$$u_n = \alpha q^n$$

où $u_0 = \alpha \neq 0$ est la condition initiale. On a

$$u_{n+2} = 9u_n$$

$$\alpha q^{n+2} = 9 \times (\alpha q^n)$$

$$q^2 \times (\alpha q^n) = 9 \times (\alpha q^n)$$

$$q^2 = 9$$

$$q = \pm 3$$

Les seules suites géométriques vérifiant la relation de récurrence sont de raison 3 ou -3 .

3. — Supposons (u_n) géométrique :

$$u_n = \alpha q^n$$

où $u_0 = \alpha \neq 0$ est la condition initiale. On a

$$u_{n+2} = a u_n$$

$$\alpha q^{n+2} = a \times (\alpha q^n)$$

$$q^2 \times (\alpha q^n) = a \times (\alpha q^n)$$

$$q^2 = a$$

$$q = \pm a$$

Noter que si $a < 0$ la suite est à valeurs complexes.

4. — Supposons (u_n) géométrique :

$$u_n = \alpha q^n.$$

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n$$

$$\alpha q^{n+2} = 4\alpha q^{n+1} + \alpha q^n$$

$$q^2 = 4q + 1$$

$$q^2 - 4q - 1 = 0$$

$$(q - 2)^2 - 5 = 0$$

$$(q - 2 - \sqrt{5})(q - 2 + \sqrt{5}) = 0$$

Si une suite géométrique vérifie la récurrence alors sa raison est ou bien égale $2 + \sqrt{5}$ ou bien à $2 - \sqrt{5}$.

5.5. L'équation caractéristique

Les exercices que nous venons de voir mettent en lumière le résultat suivant :

Théoreme 5.5. — Soit (u_n) une suite vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Si la suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ alors q est une racine du polynôme

$$x^2 - ax - b$$

et, réciproquement, toute suite géométrique ainsi obtenue vérifie la récurrence.

Démonstration. — Supposons la suite (u_n) géométrique :

$$u_n = \alpha q^n,$$

avec $\alpha, q \neq 0$. On a alors

$$u_{n+2} = \alpha q^{n+2}$$

et

$$au_{n+1} + bu_n = a\alpha q^{n+1} + b\alpha q^n.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \alpha q^{n+2} &= a\alpha q^{n+1} + b\alpha q^n \\ q^2 &= aq + b \end{aligned}$$

□

Remarquez que les représentations graphiques de ces suites géométriques sont situées sur les droites d'équation

$$y = ax$$

où a est la racine correspondante du polynôme. Il y a ainsi une adéquation entre un fait algébrique simple –la suite est géométrique– et un fait géométrique –l'orbite est contenue dans une droite.

Définition 5.6. — *Le polynôme associé à la récurrence s'appelle le polynôme caractéristique de la récurrence. Ses racines sont solutions de l'équation caractéristique.*

Exemple 5.7. — Pour la récurrence

$$u_{n+2} = 4u_n$$

le polynôme caractéristique est

$$x^2 - 4.$$

Ses racines sont ± 2 et ce sont les raisons des suites géométriques vérifiant la récurrence. Dans la représentation graphique, on a deux droites invariantes d'équation

$$y = \pm 2x$$

comme nous l'avons observé précédemment.

Exemple 5.8. — Considérons la suite de Fibonacci

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

avec

$$u_0 = u_1 = 1.$$

L'équation caractéristique est

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

On reconnaît le nombre d'or

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$$

On a donc deux droites invariantes d'équation

$$y = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) x.$$

Il nous reste toujours à comprendre pourquoi les trajectoires s'agglutinent autour de l'une de ces deux droites...

5.6. Dynamique de la suite de Fibonacci

Cherchons les suites géométriques $u = (u_n)$ vérifiant la récurrence de Fibonacci

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Le polynôme caractéristique est

$$x^2 - x - 1.$$

Ses racines sont les raisons des suites que nous cherchons. Redémontrons encore une fois ce résultat. Si $u_n = q^n$ alors

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

La suite nulle n'est pas solution, on a donc $q \neq 0$. En divisant les deux membres de l'égalité par q^n , on obtient :

$$q^2 = q + 1.$$

Donc q est racine du polynôme

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Si une suite géométrique vérifie la récurrence alors sa raison est ou bien égale $1/2 + \sqrt{5}/2$ ou bien à $1/2 - \sqrt{5}/2$.

Nous avons vu que les trajectoires s'agglutinent le long d'une droite, mais que se passent-elles au voisinage de l'autre droite. Pour le comprendre choisissons des orbites dont le point initial est proche de la droite de pente $1/2 - \sqrt{5}/2$:

Nous choisissons un point $x \in [-100, 100]$, nous lui associons le point sur la droite invariante

$$y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x \approx -0,618x$$

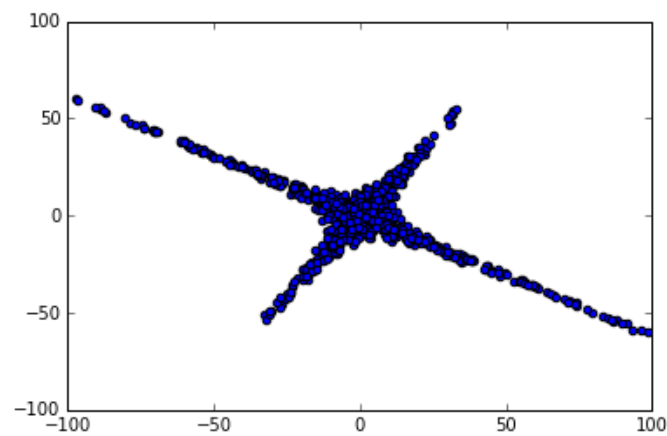
```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import random as rd
3 N=10 #Nombre de points maximal de l'orbite
4 L=100
5 def fibo(a,b): #calcule le point suivant
6     return (b,a+b)
7 plt.axis([-L,L,-L,L])
8 for i in range(100):
9     x=rd.randint(-L,L)
10    y=(1/2-5**(1/2)/2)*x+rd.randint(-L,L)/L
11    for j in range(N):
12        plt.scatter(x,y)
13        (x,y)=fibo(x,y)
14

```

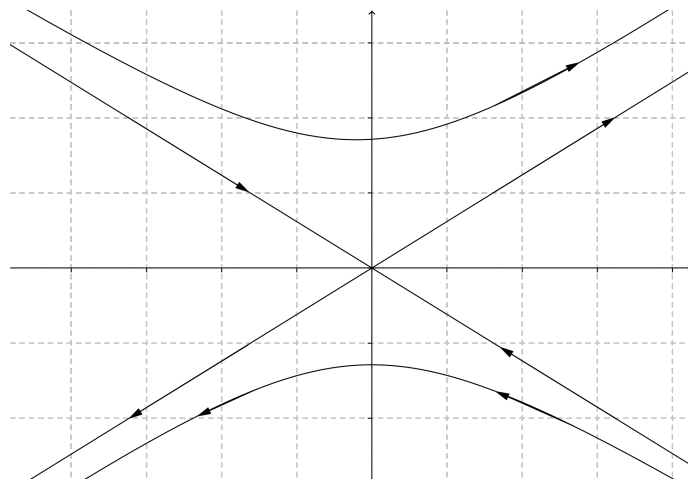
et nous ajoutons à y un nombre aléatoire dans $[-1, 1]$ de manière à être proche de la droite invariante.

Le résultat est alors le suivant :



On voit que les trajectoires suivent la droite de pente $1/2 - \sqrt{5}/2 \approx -0,618$ jusqu'à s'approcher de l'origine et prennent alors la droite de pente $1/2 + \sqrt{5}/2 \approx 0,618$.

On peut résumer ce comportement par une figure :



Les flèches indiquent le sens des trajectoires que nous avons observées.

5.7. Le principe de superposition

Les récurrences linéaires ont une propriété très particulière : elles vérifient le *principe de superposition*. Ce qui signifie que si deux suites sont solutions d'une même récurrence alors leur somme ainsi que tout multiple d'elles sont également solutions. Prenons par exemple la récurrence

$$u_{n+2} = 4u_n.$$

Les suites géométriques

$$(2^n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

et $((-2)^n) = (1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots)$ sont solutions. Leur somme

$$(2, 0, 8, 0, 16, 0, 32, \dots)$$

est aussi solution, de même que toute combinaison linéaire par exemple

$$3 \times (2^n) + 2 \times (-2)^n = (5, 2, 20, 8, 80, 32, 320, 128, 1280, \dots)$$

Inversement si je sais qu'une suite vérifie la récurrence et qu'elle commence par 5, 2 pour intégrer la récurrence il me suffit de trouver α, β tels que l'équation

$$(u_n) = \alpha(2^n) + \beta(-2)^n$$

est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. On est ainsi conduit au système

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 5 \\ 2\alpha - 2\beta &= 2\end{aligned}$$

On retrouve ainsi notre point de départ :

$$\alpha = 3, \beta = 2$$

Ainsi la recherche de deux solutions géométriques permet d'intégrer la solution générale et donc de calculer ses termes.

Voici un autre exemple sous forme d'exercice.

Exercice 5.9. — On considère la suite $u = (u_n)$ vérifiant la récurrence

$$u_{n+2} = 4u_n$$

et telle que $u_0 = 2, u_1 = 0$. Calculer approximativement la valeur de u_{2018} .

Réponse. — *Nous allons intégrer la récurrence. Les racines du polynôme caractéristique sont ± 2 . Ce qui signifie que les suites géométriques*

$$\begin{aligned}(1, 2, 4, 8, 16, \dots), \\ (1, -2, 4, -8, 16, \dots)\end{aligned}$$

sont solutions de la récurrence. D'après le principe de superposition, toute solution est donc de la forme

$$u_n = \alpha 2^n + \beta (-2)^n.$$

Nous avons

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(2)^0 + \beta(2)^0 = 2 \\ \alpha(2)^1 + \beta(-2)^1 = 4 \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi $\alpha = \beta = 1$. Par conséquent, la suite $u = (u_n)$ est donnée par :

$$u_n = 2^n + (-2)^n$$

Vérifions notre résultat. Pour $n = 0$, on a bien

$$u_0 = 2^0 + (-2)^0 = 2$$

et on a également $u_1 = 0$. D'autre part

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + (-2)^{n+2} = 4u_n.$$

Par conséquent

$$u_{2018} = (2)^{2018} + (-2)^{2018} = 2^{2019}.$$

Comme $2^{10} \approx 10^3$, on a

$$u_{2018} \approx 10^{673}$$

5.8. La méthode d'intégration

On généralise facilement la méthode précédente :

Proposition 5.10. — Soit (u_n) une suite vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

et q_1, q_2 les racines du polynôme caractéristique

$$x^2 - ax - b.$$

Il existe deux uniques réels α, β tels que

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$$

pout tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Les suites géométriques q_1^n et q_2^n vérifient la relation de récurrence. Il existe deux uniques α, β tels que

$$\begin{cases} \alpha q_1^0 + \beta q_2^0 = u_0 \\ \alpha q_1^1 + \beta q_2^1 = u_1 \end{cases}$$

autrement dit tels que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 = u_1 \end{cases}$$

La suite de terme général

$$\alpha q_1^n + \beta q_2^n$$

vérifie la même récurrence que u et prend les mêmes valeurs que u pour $n = 0$ et $n = 1$. Elle est donc égale à u . $\square$

Exercice 5.11. — Intégrer la suite de Fibonacci.

Réponse. — La suite de Fibonacci est définie par

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

avec

$$u_0 = u_1 = 1$$

Son équation caractéristique est

$$x^2 = x + 1$$

et ses solutions sont

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

On a donc

$$u_n = \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Pour déterminer α, β , on utilise les conditions initiales de la suite de Fibonacci $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. On obtient

ainsi le système d'équations

$$\begin{aligned}\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^0 &= 1, \\ \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^1 &= 1\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 1, \\ \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= 1\end{aligned}$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}, \\ \beta &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement

$$u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Exercice 5.12. — Ecrire un programme Xcas qui étant donnée une récurrence d'ordre 2

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

détermine, en fonction des conditions initiales u_0, u_1 , les coefficients α, β, q_1, q_2 tels que

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$$

Réponse. —

```

1 restart:
  Done
2 a:=1:b:=1:#La récurrence est u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n
  ( Done, 1 )
3 u:=[1,1]:#conditions initiales
  [ 1, 1 ]
4 q:=csolve(x^2-a*x-b=0,x)#equation caracteristique
  ( (-sqrt(5)+1)/2, (sqrt(5)+1)/2 )
5 eq:=[alpha+beta=u[1],alpha*q[1]+beta*q[2]=u[2]]
  (a+beta)=1, (a*(-sqrt(5)+1)/2 + beta*(sqrt(5)+1)/2)=1
6 solve(eq,[alpha,beta])
  alpha = (-sqrt(5)+5)/10, beta = (sqrt(5)+5)/10

```

5.9. Comportement asymptotique de la suite de Fibonacci

Nous avons vu que la suite de Fibonacci

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = u_1 = 1$$

peut s'écrire comme la somme de deux suites géométriques

$$\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}},$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer le phénomène de rouleau à pâtisserie que nous avons observé.

On remarque en effet que pour n grand, la quantité

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx (-0,6)^n$$

devient négligeable devant

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx (1,6)^n$$

dès que n est grand.

Par conséquent, la suite se comporte pratiquement comme une suite géométrique dont la raison est égale au nombre d'or :

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Ce qui signifie que lorsque n , la suite ressemble de plus en plus à une suite géométrique. Or nous avons vu que les orbites des suites géométriques sont situées sur des droites. Conclusions les trajectoires s'agglutinent le long d'une droite comme nous l'avons observé expérimentalement. Mais nous pouvons maintenant quantifier ce phénomène.

Voici un tableau illustrant ce comportement quasi-géométrique. Les six premiers termes ne ressemblent pas du tout à une suite géométrique.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_n =$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Mais dès le terme $u_6 = 13$, la suite de Fibonacci commence à ressembler fortement à une suite géométrique. Comparons la suite de Fibonacci avec sa partie géométrique dominante

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On trouve

$n =$	6	7	8	9
Fibonacci	13	21	34	55
Géométrique	12,98	21,00	33,99	55,00

Si l'on pousse le calcul quelques termes plus loin, la ressemblance devient encore plus frappante, car la quantité qui calcule l'erreur avec la partie dominante est inférieure au centième :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n < 10^{-2}$$

Le tableau suivant indique les termes la suite de Fibonacci et sa partie géométrique dominante :

$n =$	10	11	12	13	14	15
Fb.	89	144	233	377	610	987
Gm.	88,997	144,001	232,999	377,001	609,999	987,001

Et ce ne sont que les quinze premiers termes ! On voit donc que certaines suites bien que non-géométriques se comportent presque comme des suites géométriques.

Comme on sait que les termes de la suites Fibonacci sont des entiers, la connaissance de son comportement dominant nous permet de déduire sa valeur, il suffit de prendre successivement l'entier le plus proche.

CHAPITRE 6

RÉCURRENCES QUADRATIQUES

L'étude des récurrences linéaires ou affines est trompeuse : on pourrait être tenté de développer des méthodes générales d'intégration des récurrences. C'est un leurre et à quelques rares exceptions près ce sont les seuls cas que l'on peut intégrer explicitement. Nous allons voir que même pour les récurrences quadratiques, la situation est extrêmement complexe.

6.1. Évolution d'une population

Supposons que dans une population, chaque couple possède deux enfants qui à leur tour ont deux enfants et ainsi de suite. Imaginons que la mortalité soit nulle, ce qui est bien sûr impossible, mais supposons le tout de même. A chaque génération, la population va doubler. Par exemple, si initialement nous avons deux individus, à la génération suivante ils auront 2 enfants. Ce qui nous donnera un total de 4 individus. S'ils ont à nouveau chacun deux enfants, la population passe à 8 individus, puis à 16 et ainsi de suite. C'est donc une suite géométrique de raison 2 avec $u_0 = 2$ donc :

$$u_{n+1} = 2u_n$$

On l'appelle le *modèle Malthusien* du nom de l'économiste Malthus bien qu'il ait été considéré par Euler avant la naissance de Malthus. Euler tenta de calculer

la raison de la suite géométrique en fonction des naissances. C'est un modèle grossier : quand la population grandit il devient plus difficile de la nourrir et la croissance ralentit.

Au XIX siècle, le mathématicien Verhulst propose d'améliorer le modèle en ajoutant un terme venant contrecarrer l'augmentation de la population. En effet, si la démographie explose, toute sorte de problèmes apparaissent notamment la nourriture. Dans ce modèle, on a donc :

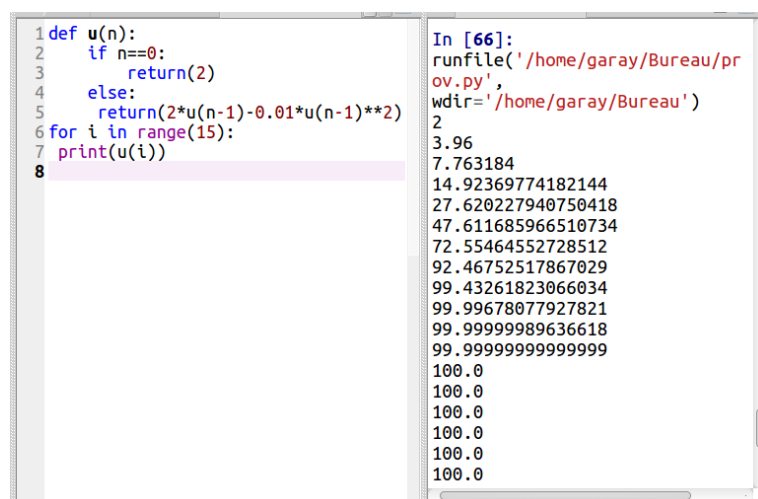
$$u_{n+1} = au_n - bu_n^2$$

C'est ce que l'on appelle depuis Verhulst, le *modèle logistique*. Il s'agit donc en fonction d'un échantillon d'essayer de déterminer a et b .

Reprenons notre exemple précédent et supposons que $a = 2$, $b = -0,01$. Autrement dit nous avons la récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n - 0,01u_n^2.$$

A priori, on peut se dire que cela ne va pas changer grand chose. Demandons tout de même son avis à python :



The image shows a Jupyter Notebook interface with two main panels. The left panel contains a Python function definition and a loop to print its values. The right panel shows the execution of the code, displaying the output of the function for the first 15 iterations.

```

1 def u(n):
2     if n==0:
3         return(2)
4     else:
5         return(2*u(n-1)-0.01*u(n-1)**2)
6 for i in range(15):
7     print(u(i))
8

```

Output of the code (In [66]):

```

runfile('/home/garay/Bureau/prev.py',
wdir='/home/garay/Bureau')
2
3.96
7.763184
14.92369774182144
27.620227940750418
47.611685966510734
72.55464552728512
92.46752517867029
99.43261823066034
99.99678077927821
99.9999989636618
99.99999999999999
100.0
100.0
100.0
100.0
100.0
100.0

```

La croissance démographique n'est plus explosive, elle se stabilise maintenant autour de 100 individus ! Une modification qui nous semblait a priori sans grande importance a eu des conséquences drastiques...

6.2. Premier exemple : $u_{n+1} = u_n^2$.

Le modèle de Verhulst nous pousse à étudier un nouveau type de récurrence. Une récurrence est dite *quadratique* si elle est de la forme

$$u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c, \quad a \neq 0.$$

Une telle récurrence est obtenue en itérant la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2 + bx + c$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ u_2 &= f(u_1) = f(f(u_0)) \\ u_3 &= f(u_2) = f(f(u_1)) = f(f(f(u_0))) \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Il est pratique de noter $f \circ f$ ou encore $f^{(2)}$ la fonction

$$x \mapsto f(f(x)).$$

De même, on note $f \circ f \circ f$ ou encore $f^{(3)}$ la fonction

$$x \mapsto f(f(f(x))).$$

Comme nous allons le voir ces récurrences complexes sont. Il y a cependant un cas simple et intéressant, celui où $a = 1$, $b = c = 0$. On a alors la récurrence

$$u_{n+1} = u_n^2$$

obtenue en itérant la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f^{(2)}(x) &= x^4 \\ f^{(3)}(x) &= x^8 \\ f^{(4)}(x) &= x^{16} \\ &\dots \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0^2 \\ u_2 &= u_1^2 = u_0^4 \\ u_3 &= u_2^2 = u_1^4 = u_0^8 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n &= u_0^{2^n} \end{aligned}$$

Par exemple si $u_0 = 2$, on a

$$u = (2, 4, 16, 256, \dots)$$

Essayons maintenant plusieurs orbites avec diverses conditions initiales :

$n =$	0	1	2	3	4
$u_n =$	0	0	0	0	0
$u_n =$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}	10^{-16}
$u_n =$	2^{-1}	2^{-2}	2^{-4}	2^{-8}	2^{-16}
$u_n =$	1	1	1	1	1
$u_n =$	2^1	2^2	2^4	2^8	2^{16}
$u_n =$	10^1	10^2	10^4	10^8	10^{16}

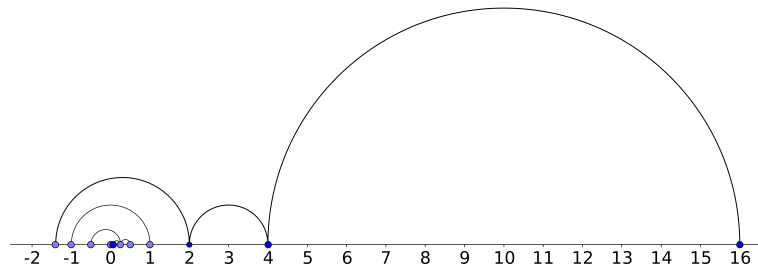
Apparemment la récurrence possède deux points fixes : 0 et 1. En effet

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases} \implies u_n = 0 \text{ ou } u_n = 1$$

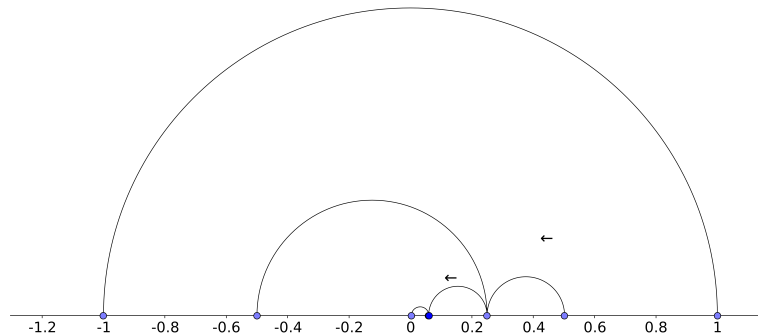
La deuxième ligne du tableau semble montrer que le point 0 est attractif : si on part d'une valeur proche de zéro, on continue à s'approcher très vite de 0. En revanche, d'après les deux dernières lignes, il semblerait que le point 1 soit répulsif.

Sur le schéma suivant, on a représenté les premiers termes des orbites des points -1 ; $-0,5$ et $-\sqrt{2} \approx -1,5$, ce qui donne pour les premiers termes :

$$\begin{aligned} &(-1, 1, 1, 1, 1 \dots) \\ &(-0,5; 0,25; 0,0625; \dots) \\ &(-1,5; 2,25; 4,5; 20,25; \dots) \end{aligned}$$



Faisons un zoom sur l'intervalle $[-1, 1]$ (partie de gauche de la figure). On voit alors :



Ainsi, la suite s'approche très rapidement de 0. Comparons par exemple notre suite à une suite géométrique de raison $1/10$:

$n =$	0	1	2	3	4
géométrique	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
quadratique	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}	10^{-16}

On voit que la suite géométrique s'approche très lentement de l'origine par rapport à notre suite quadratique. De même, la suite part très vite vers l'infini. Comparons par exemple notre suite à une suite géométrique de raison 2 :

$n =$	0	1	2	3	4
géométrique	2	2^2	2^3	2^4	2^5
quadratique	2^1	2^2	2^4	2^8	2^{16}

La suite grandit donc très rapidement lorsque la condition initiale est plus grande que 1 et décroît très rapidement dès que celle-ci est inférieure à 1 en valeur absolue. Voici deux exercices pour se convaincre de ce phénomène.

Exercice 6.1. — Le nombre d'atomes de l'univers est inférieur à 10^{100} . À partir de quelle valeur de n aura-t-on

$$2^{2^n} > 10^{100}$$

Réponse. — On passe aux logarithmes en base 2 et on obtient

$$2^n > \log_2(10^{100})$$

$$n > \log_2(\log_2 10^{100}) = 8,375877\dots$$

Donc, la valeur excède 10^{100} dès que $n \geq 9$. On a en effet

$$2^{2^9} = 2^{512} = (1,3\dots) \times 10^{154}$$

Exercice 6.2. — Le rayon atomique de l'hydrogène est de $2,5 \times 10^{-11}$ mètres. À partir de quelle valeur de n aura-t-on

$$2^{-2^n} < 10^{-12}$$

Réponse. — On passe aux logarithmes en base 2 et on obtient (attention dans les simplifications, le logarithme n'existe que pour des valeurs positives) :

$$2^{-2^n} < 10^{-12}$$

$$-2^n < \log_2(10^{-12})$$

$$-n < \log_2 \log_2(10^{-12}) = -5,316\dots$$

Donc, la valeur est plus petite que 10^{-12} mètres dès que $n \geq 6$. On a bien

$$2^{-2^6} = 2^{-64} = (5,4\dots) \times 10^{-20}$$

6.3. Un premier exemple non trivial

Considérons maintenant la récurrence

$$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}u_n$$

obtenue en itérant la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + \frac{1}{2}x$$

Un programme python nous donne facilement des valeurs approchées :

```

1 def f(x):
2     return(x**2+0.5*x)
3 def orbite(x):
4     u=[x]
5     for i in range(6):
6         u.append(f(u[i]))
7     return u

In [2]: orbite(0.1)
Out[2]:
[0.1,
 0.060000000000000005,
 0.033600000000000005,
 0.017928960000000004,
 0.009285927606681602,
 0.004729192254857332,
 0.002386961386812069]

In [3]: orbite(0.4)
Out[3]:
[0.4,
 0.36000000000000004,
 0.30960000000000004,
 0.25065216,
 0.1881525853126656,
 0.1294776880161727,
 0.0815033157020997]

In [4]: orbite(0.5)
Out[4]: [0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5]

In [5]: orbite(0.6)
Out[5]:
[0.6,
 0.6599999999999999,
 0.7655999999999998,
 0.9689433599999997,
 1.4233229148880888,
 2.73750957748957,
 8.86271347559191]

In [6]: orbite(2)
Out[6]: [2, 5.0, 27.5, 770.0, 593285.0,
351987387867.5, 1.2389512121796188e+23]

```

Regroupons-les dans un tableau :

$n =$	0	1	2	3	4	5	6
$u_n =$	0	0	0	0	0	0	0
$u_n =$	0, 1	0, 06	0, 03	0, 17	0, 009	0, 0005	0, 0002
$u_n =$	0, 4	0, 36	0, 31	0, 25	0, 19	0, 13	0, 08
$u_n =$	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5
$u_n =$	0, 6	0, 66	0, 76	0, 97	1, 42	2, 74	8, 86
$u_n =$	2	5	27, 5	770	593285	$3, 5 \cdot 10^{11}$	$1, 2 \cdot 10^{23}$

Cela donne une impression assez chaotique ! Tâchons d'y mettre de l'ordre.

Nous commençons par les premières lignes. La première nous indique que 0 est un point fixe, quant à la seconde elle semble nous dire que ce point est attractif.

Essayons de mieux comprendre cette deuxième ligne. Lorsque x est petit dans l'expression

$$x^2 + \frac{1}{2}x,$$

le terme $x/2$ qui domine. Ce qui explique que sur la ligne suivante, les termes sont à peu près divisé par deux et suivent donc presque une suite géométrique :

$$(0, 1; 0, 06; 0, 03; 0, 17; 0, 009; 0, 0005; 0, 0002)$$

Donc finalement, ces deux premières lignes sont assez simples.

Continuons la lecture du tableau. On aperçoit un point fixe en 0,5. Vérifions-le par le calcul ! Nous cherchons une condition initiale $u_0 = x$ telle que

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \\ f(u_0) &= u_0 \\ f(x) &= x \end{aligned}$$

C'est *l'équation des points fixes*. Dans notre exemple :

$$x^2 + \frac{1}{2}x = x \iff x^2 = \frac{1}{2}x \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc deux points fixes $x = 0$ et $x = 0,5$. C'est bien ce que nous avons observé expérimentalement.

La ligne suivante semble indiquer que 0,5 est un point fixe répulsif. Vérifions le par le calcul !

Nous procédons comme nous l'avons fait dans le cas arithmético-géométrique. L'idée est de ramener 0,5 à

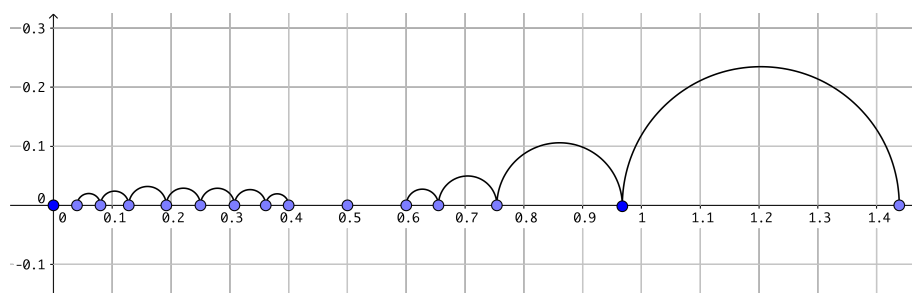
l'origine, finalement 0 est le nombre le plus simple.

$$v_n = u_n - \frac{1}{2}$$

pour laquelle le point fixe est en 0. Calculons la récurrence vérifiée par v_n .

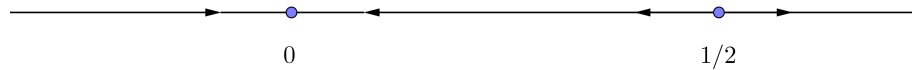
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= u_n^2 + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ &= \left(v_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= v_n^2 + v_n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= v_n^2 + \frac{3}{2}v_n \end{aligned}$$

Nous voyons maintenant très clairement que le point est répulsif. En effet si v_n est proche de 0 le terme $3/2v_n$ va dominer v_n^2 et donc repousser lentement notre point puis le terme quadratique dominera. Donc dans le voisinage de l'origine la suite (v_n) ressemble à une suite géométrique de raison $3/2$. Dessinons les orbites autour de 0,5 :



Si la valeur initiale est un peu moindre, la trajectoire fuit le point 0,5 qui est répulsif, mais elle est happée par 0 qui est attractif. Si la valeur initiale est légèrement au-dessus, la trajectoire part rapidement à l'infini

. Un schéma simple résume la situation :



Les point 0 est attractif et $1/2$ est répulsif.

6.4. Représentation graphique d'une itération

Nous comprenons maintenant le comportement local de notre itération : elle a deux points fixes l'un répulsif, l'autre attractif. Mais comment se comporte-t-elle dans son ensemble ?

Pour répondre à cette question, nous introduisons une nouvelle forme de représentation graphique qui va nous permettre de visualiser les itérations ⁽¹⁾. Prenons

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec

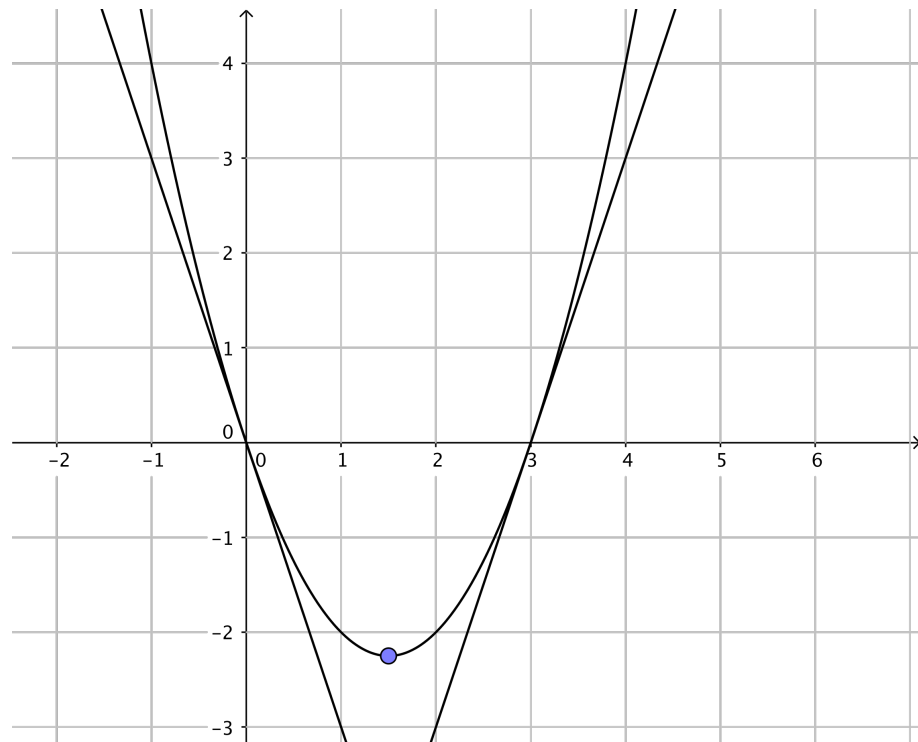
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3x$$

Le graphe de f est une parabole. Les racines du polynôme $x^2 - 3x$ sont 0 et 3, leur milieu est $3/2$. L'ordonnée correspondante vaut

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} = -\frac{9}{4} = -2,25$$

Ce qui nous donne les coordonnées du sommet

1. Je recommande vivement au lecteur d'utiliser Geogebra pour suivre l'exemple que nous allons traiter.



La droite d'équation

$$y = -3x$$

est tangente à la courbe en zéro et la symétrique par à la droite d'équation $x = 3/2$ est tangente au point 3. Au voisinage de 0, la fonction est très proche de la fonction linéaire

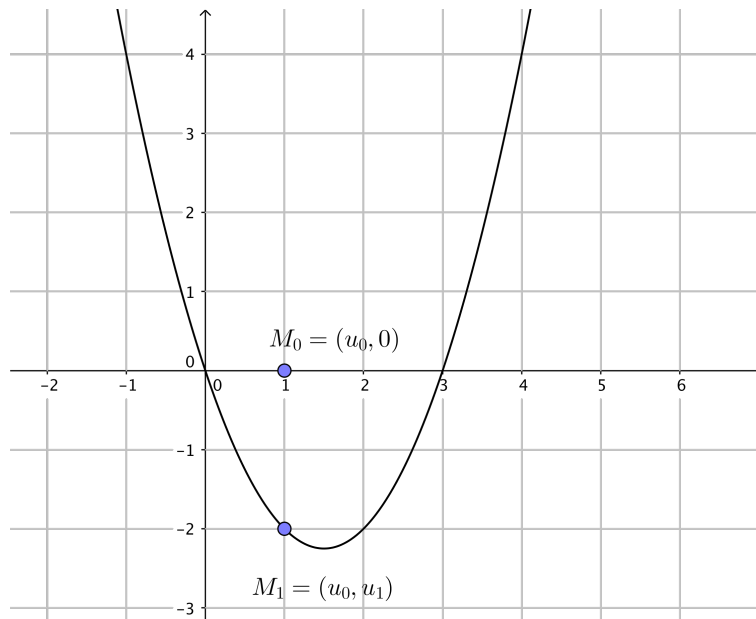
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -3x$$

et on peut négliger le terme x^2 .

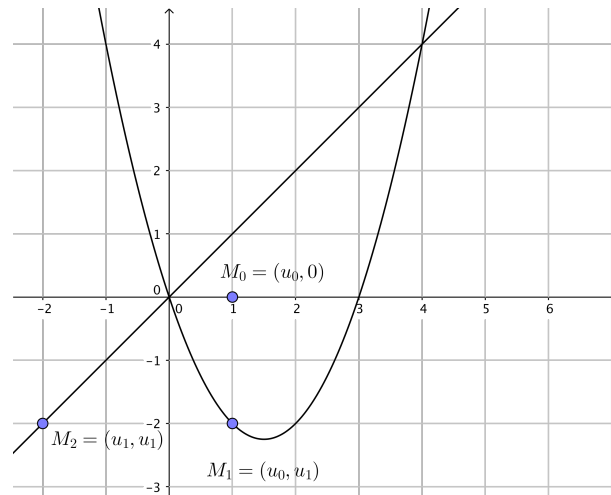
Maintenant que la courbe est tracée, tentons de dessiner les premiers termes de l'orbite de 1 :

$n =$	0	1	2	3	4	5	6
$u_n =$	1	-2	10	70	4690	2×10^7	5×10^{14}

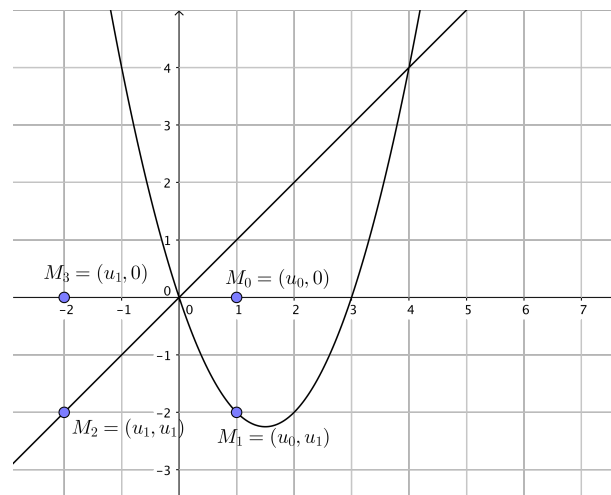
Le point u_1 est en fait $f(u_0)$, on peut le lire en ordonnée sur le graphe de f . Nous allons donc associer au point u_0 de la droite, le point $M_0 = (u_0, 0)$ sur l'axe des abscisses dans le plan. Nous considérons ensuite le point $M_1 = (u_0, u_1)$ qui se trouve sur la courbe :



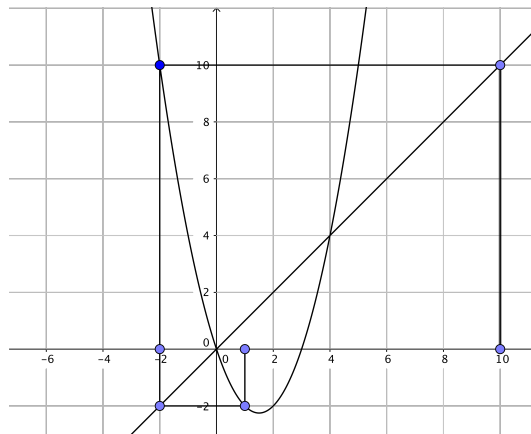
Il nous faut maintenant dessiner le point $(u_1, 0)$ à partir du point $M_1 = (u_0, u_1)$. Pour cela, on lui associe d'abord le point $M_2 = (u_1, u_1)$ situé sur la première bissectrice :



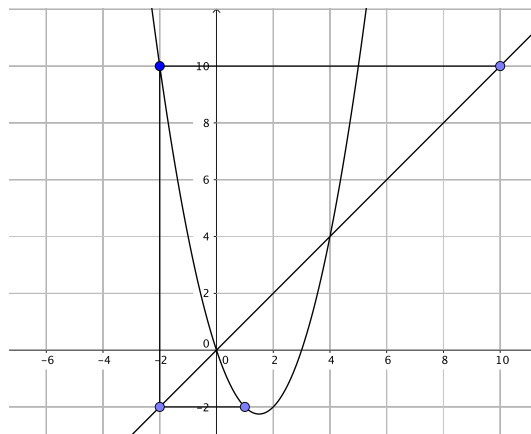
Enfin on projette le point M_2 sur l'axe des abscisses pour obtenir le point M_3 :



Ainsi en trois étapes –image sur la parabole, puis sur la bissectrice et enfin projection– nous sommes passés du point $(u_0, 0) = (1, 0)$ au point $(u_1, 0) = (-2, 0)$. C'est la construction graphique des itérés d'une fonction. On peut répéter la procédure et construire le point $u_2 = 10$:



Pour simplifier, on ne dessine que les termes sur la parabole et sur la bissectrice :



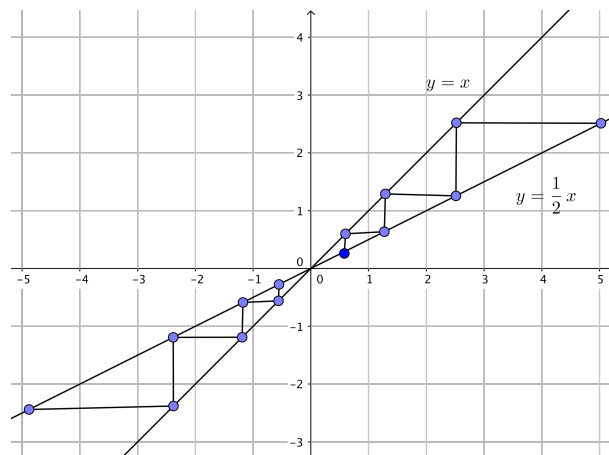
Exercice 6.3. — Dessiner sur geogebra des itérés des fonctions

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax$$

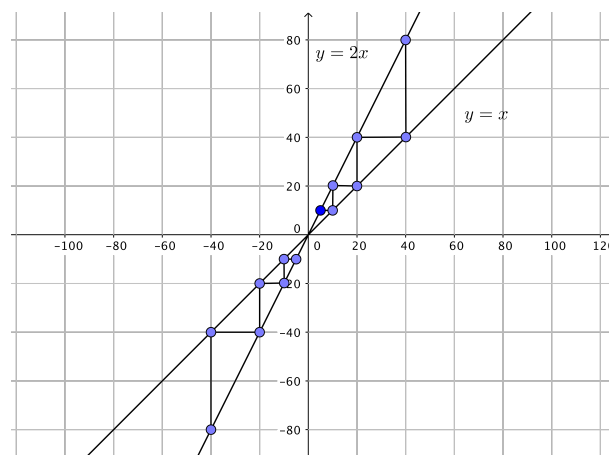
avec $a = \pm 1/2, \pm 2$.

Réponse. — Pour les suites géométriques de raison positive on a des figures en escalier.

Cas attractif :

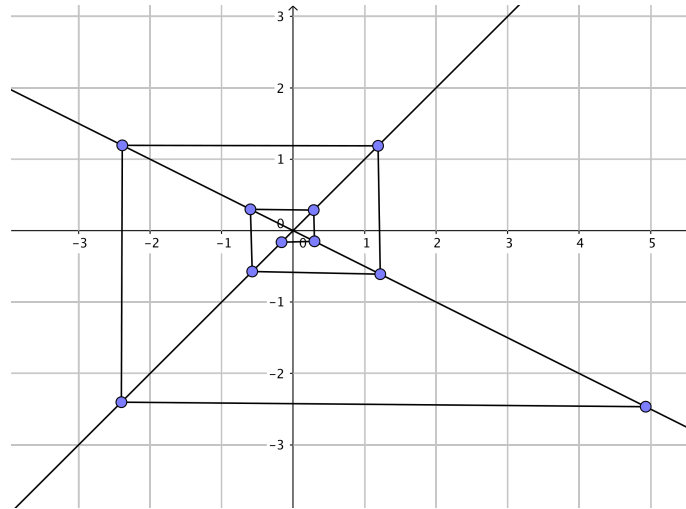


Cas répulsif :

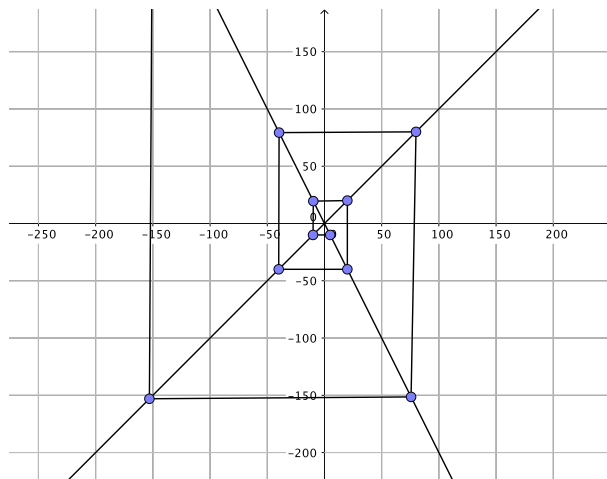


Lorsque la raison est négative, on a des figures en escargot.

Cas attractif :



Cas répulsif :



Exercice 6.4. — Reprendre cette section avec la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + \frac{1}{2}x.$$

6.5. Approximation par une suite géométrique

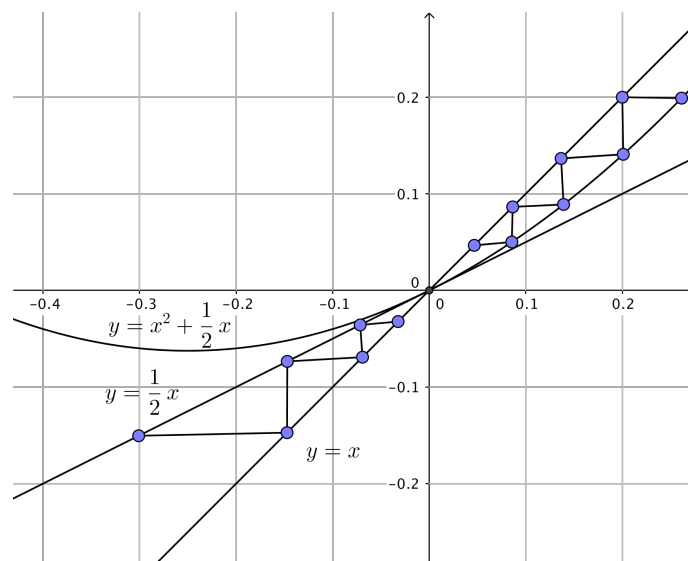
Comme nous l'avons vu, lorsque l'origine est un point fixe, le terme linéaire l'emporte sur le terme quadratique au voisinage de l'origine. Par exemple, l'itération

$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{2}x$$

ressemble beaucoup à celle de

$$x \mapsto \frac{1}{2}x$$

lorsque x est petit. Comparons maintenant les représentations graphiques de ces deux fonctions au voisinage de 0 ainsi que leurs itérés.



Sur la partie droite, on a dessiné l'itération pour la fonction et sur la partie gauche pour son approximation linéaire. On voit que plus l'on s'approche de l'origine plus l'itération ressemble à une suite géométrique.

Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un point fixe, la droite tangente à la courbe au point d'abscisse α a pour équation

$$y = ax + b$$

avec ⁽²⁾ $a = f'(\alpha)$. Au voisinage du point fixe, on peut donc approcher la suite par une suite arithmético-géométrique de raison $f'(\alpha)$.

6.6. Un théorème de point fixe

On appelle théorème de point fixe, tout théorème qui affirme que sous certaines conditions, la suite des itérés d'une fonction s'approche du point fixe.

Nous partons d'une suite définie par une récurrence quadratique

$$u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c.$$

Il s'agit donc d'itérer la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

Nous supposons que l'équation des points fixes

$$f(x) = x$$

possède deux solutions. Notons α l'une d'entre elle. Pour étudier l'itération au voisinage de α , nous posons

$$v_n = u_n - \alpha.$$

Ainsi lorsque u_n est proche de α , v_n est proche de 0.

2. Voir *Mathématique Autrement, Algèbre*

Nous cherchons maintenant à établir la relation de récurrence liant v_{n+1} à v_n :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha \\
 &= au_n^2 + bu_n + c - \alpha \\
 &= a(v_n + \alpha)^2 + b(v_n + \alpha) + c - \alpha \\
 &= av_n^2 + (2a\alpha + b)v_n + (a\alpha^2 + b\alpha + c - \alpha) \\
 &= av_n^2 + f'(\alpha)v_n + (f(\alpha) - \alpha)
 \end{aligned}$$

On reconnaît le polynôme dérivée

$$f'(x) = 2ax + b$$

de

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Par ailleurs, comme α est un point fixe de f , on a aussi l'égalité :

$$f(\alpha) - \alpha = 0$$

Nous avons ainsi montré que la récurrence vérifiée par la suite (v_n) est :

$$v_{n+1} = f'(\alpha)v_n + av_n^2.$$

Lorsque (v_n) est petit, le terme géométrique domine, comme nous l'avons constaté sur les exemples.

Si $|f'(\alpha)| < 1$ alors on s'attend à ce que l'origine soit un point fixe attractif de la suite (v_n) autrement dit que la suite (u_n) s'approche du point fixe α à la vitesse d'une suite géométrique. Ce que nous confirme le théorème suivant :

Théoreme 6.5. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ un fonction possédant un point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(\alpha)| < 1$. Il existe un intervalle $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ et un nombre $k > 0$ tels que pour tout $u_0 \in I$ la suite des itérés de u_0 définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ s'approche du point fixe α et plus précisément

$$|u_n - \alpha| < k^n |u_0 - \alpha|.$$

Démonstration. — La preuve est un peu technique, mais elle est assez caractéristique des démonstrations de théorèmes de points fixes donc comme il faut se jeter à l'eau un jour ou l'autre...

On pose

$$v_n = u_n - \alpha$$

pour ramener le point fixe à l'origine. De sorte que

$$v_{n+1} = bv_n + av_n^2$$

avec $b = f'(\alpha)$. On a alors

$$v_1 = bv_0 + av_0^2 = v_0(b + av_0)$$

Par hypothèse $|b| < 1$, on a

$$|b| + |av_0| < 1$$

dès que

$$|v_0| < \frac{1 - |b|}{|a|}$$

ou autrement dit dès que

$$v_0 \in]-\delta, \delta[, \quad \delta = \frac{1 - |b|}{|a|}.$$

L'inégalité triangulaire

$$|A + B| \leq |A| + |B|.$$

montre que la quantité

$$k = |b + av_0|$$

est alors majorée par 1. On a alors

$$|v_1| < k|v_0|, \quad k < 1$$

De même

$$\begin{aligned} |v_2| = |v_1(b + av_1)| &\leq |v_1|(|b| + |av_1|) \\ &\leq |v_1|(|b| + |av_0|) = k|v_1| \end{aligned}$$

et ainsi de suite. En mettant toutes ces inégalités bout à bout, on trouve

$$\begin{aligned} |v_1| &\leq k|v_0| \\ |v_2| &\leq k|v_1| \leq k^2|v_0| \\ |v_3| &\leq k|v_2| \leq k^2|v_1| \leq k^3|v_0| \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ce qui démontre le théorème. $\square$

Nous pouvons donc améliorer notre plan d'étude d'une itération quadratique associée à une fonction f :

1. On cherche les points fixes.
2. On calcule la dérivée aux points fixes pour déterminer si le point est attractif ou répulsif.
3. On illustre graphiquement le comportement aux points fixes.

CHAPITRE 7

CE QUE NOUS IGNORONS EST IMMENSE...

Il ne faudrait pas croire que l'étude des itérés se limite à la localisation des points fixes, la situation est beaucoup plus complexe et aussi beaucoup plus intéressante.

Considérons la fonction polynomiale

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 1.$$

A priori rien de plus innocent. Nous appliquons notre plan d'étude :

Points fixes. — Ils sont solutions de l'équation

$$x^2 - 1 = x$$

ce qui nous donne le nombre d'or et son conjugué

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nature des points fixes. — On a

$$f'(x) = 2x$$

donc

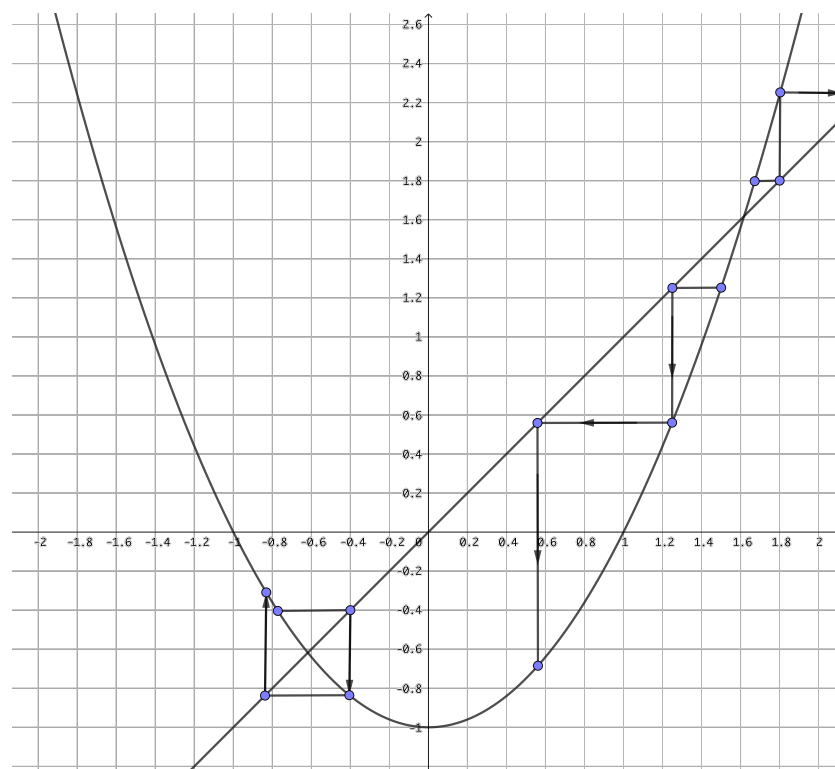
$$|f'(\alpha_+)| \approx 3,23 > 1$$

$$|f'(\alpha_-)| \approx 1,23 > 1$$

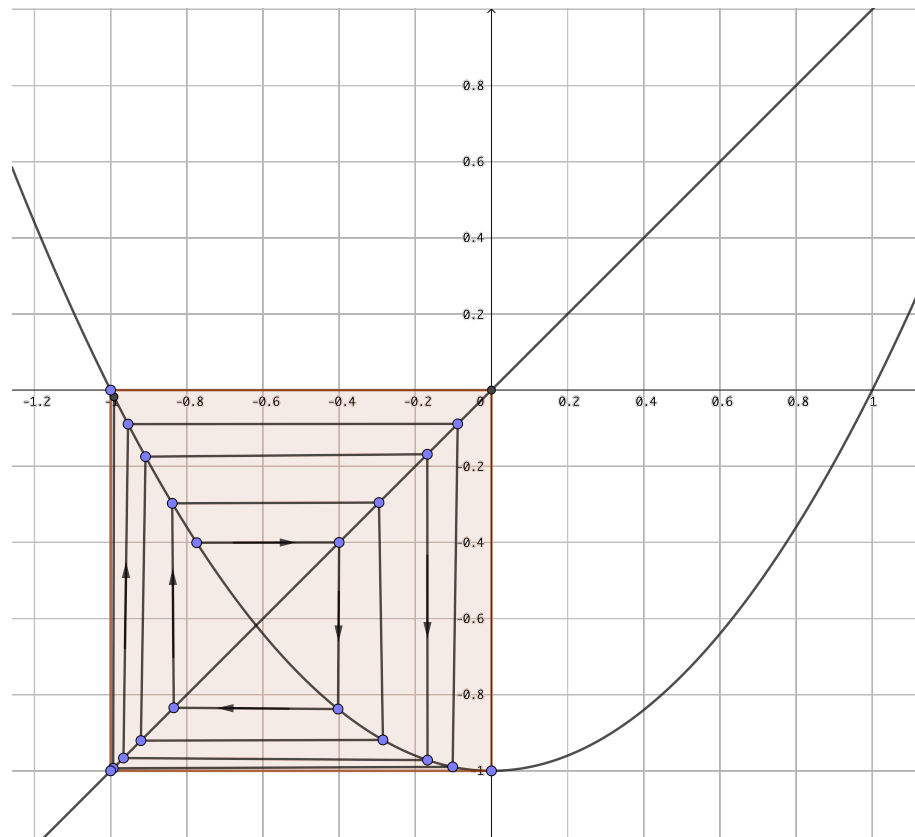
Les deux points sont donc répulsifs ! Si l'on s'éloigne de l'un, on s'attendrait à s'approcher de l'autre, mais ce

n'est pas le cas. Comment cela est-il possible ? Regardons les trajectoires.

Représentation graphique. — Les deux points fixes sont bien répulsifs :



Les deux trajectoires qui ne partent pas vers l'infini, doivent bien s'approcher de quelque chose. Continuons à itérer celle de gauche. On voit alors qu'elle s'« enroule » sur le bord d'un carré :



Ce qui signifie que la suite (u_n) s'approche alternativement des valeurs -1 et 0 .

Vérifions le par le calcul. Nous avons pris

$$u_0 = -0,77$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 1.$$

On trouve à 10^{-2} près :

$n =$	0	1	2	3	4	5	6
$-\alpha \approx$	-0,77	-0,40	-0,8	-0,30	-0,90	-0,06	-0,99

En effet, les valeurs semblent s'approcher alternativement de -1 et de 0 . De plus pour la condition initiale $u_0 = 0$ on a

$$u_1 = 0^2 - 1 = 1$$

$$u_2 = 1^2 - 1 = 0$$

$$u_3 = 1$$

$$u_4 = 0$$

etc

Les points 0 et 1 sont échangés. On dit que 0 et 1 forment un *cycle d'ordre 2*. Graphiquement c'est le bord de notre carré. Les points fixes sont maintenant répulsifs et c'est le cycle d'ordre 2 qui est attractif.

Imaginons que dans un voyage spatial, les objets subissent une telle influence. Les points fixes attractifs constitue des zones dangereuses : ils attirent toutes les météorites des alentours.

Nous pensons alors que le point -1 est un havre de paix, car ce n'est pas un point fixe. Alors que nous approchons de ce point d'apparence paisible, nous sommes victimes d'une pluie incessante d'astéroïdes car c'est un élément d'un cycle attractif, qui a la mauvaise idée d'attirer tout les corps célestes qui lui sont voisins !

Bref, ceci nous amène à étudier non plus seulement les points fixes, mais tous les cycles. Le point fixe n'étant que le cas particulier des cycles d'ordre 1. Toute la complexité est là !

7.1. Existence de cycles

Les cycles de période 2, c'est à dire des suites qui prennent deux valeurs :

$$u_1 = f(u_0)$$

$$u_0 = f(u_1)$$

Pour une telle donnée initiale $u_0 = x$, on aura donc

$$u_0 = f(f(u_0)).$$

Ainsi un cycle d'ordre 2 est un point fixe de $f \circ f$. Il sera donc solution de l'équation de degré 4

$$f(f(x)) = x$$

$$f(x^2 - 1) = x$$

$$(x^2 - 1)^2 - 1 = x$$

$$x^4 - 2x^2 = x$$

$$x(x^3 - 2x - 1) = 0$$

Les valeurs 0 et -1 sont bien solution. On peut donc factoriser l'équation par ⁽¹⁾ $x(x + 1)$ et

$$\frac{x(x^3 - 2x - 1)}{x(x + 1)} = x^2 - x - 1.$$

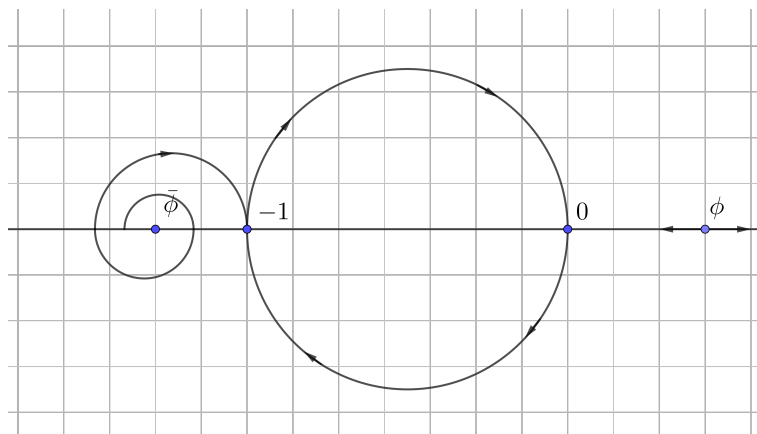
Donc les solutions sont 0, -1 , le nombre d'or ϕ et son conjugué $\bar{\phi}$. On a donc exactement deux points fixes et un cycle attractif d'ordre 2 comme nous l'avons constaté graphiquement.

Nous pouvons schématiser la situation ainsi :

- $\bar{\phi}$ est un escargot répulsif.
- $-1, 0$ est un cycle d'ordre 2 attractif.
- ϕ est un escalier répulsif.

1. Voir *Mathématique Autrement, Algèbre*

Ce que l'on peut aussi résumer par le graphique suivant :



7.2. Forme canonique

Nous partons donc d'une fonction polynômiale :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$$

et considérons une suite

$$u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c.$$

Peut-on trouver une forme canonique pour une telle suite ? ou bien sommes nous contraint d'étudier tous les cas possibles ? En posant

$$v_n = ku_n$$

on obtient :

$$kv_{n+1} = ak^2v_n + bkv_n + c$$

$$v_{n+1} = akv_n^2 + bv_n + c/k$$

Donc en posant $k = a^{-1}$, on se ramène à la suite

$$v_{n+1} = v_n + bv_n + C$$

avec $C = c/k$ et à un polynôme de la forme :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + Bx + C.$$

La connaissance de (v_n) est équivalente à celle de (u_n) ?
En posant maintenant

$$w_n = v_n - \frac{B}{2}$$

on se ramène à une itération de la forme

$$w_{n+1} = w_n^2 + \alpha.$$

C'est la *forme canonique* pour les itérations quadratiques. Notre suite initiale (u_n) est de la forme

$$u_n = Aw_n + B$$

On peut donc la retrouver facilement à partir de (w_n) . De plus, si (w_n) possède un cycle d'ordre k , il en est de même pour (u_n) .

7.3. Apparition des points fixes

Nous considérons les itérés de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \alpha$$

c'est à dire les suites vérifiant la récurrence

$$u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$$

où α est un paramètre fixé.

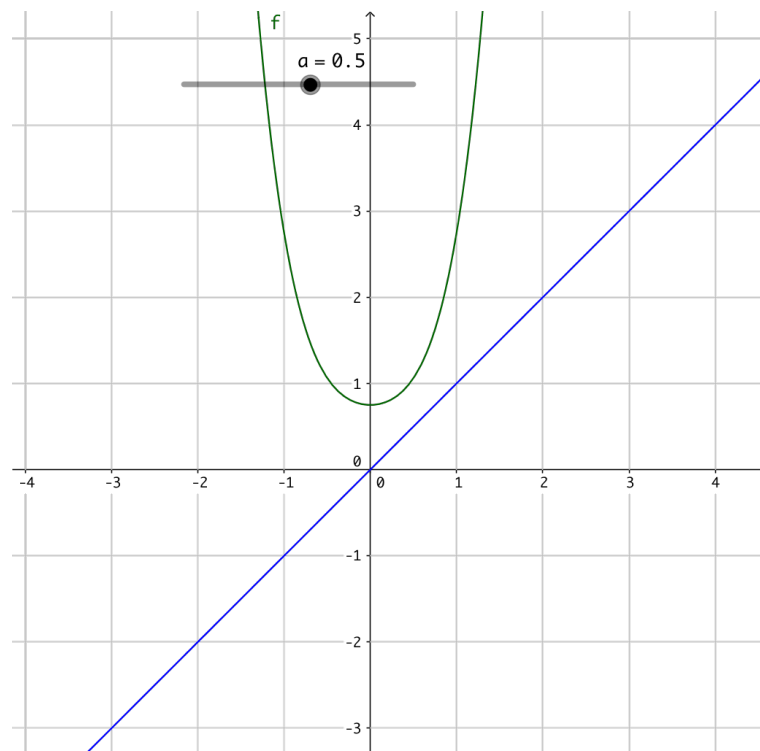
Les points fixes de l'itération sont les solutions de l'équation

$$x^2 + \alpha = x \iff x^2 - x + \alpha$$

On a 2 points fixes si $\alpha < 1/4$, 1 point fixe pour $\alpha = 1/4$ et aucun pour $\alpha > 1/4$.

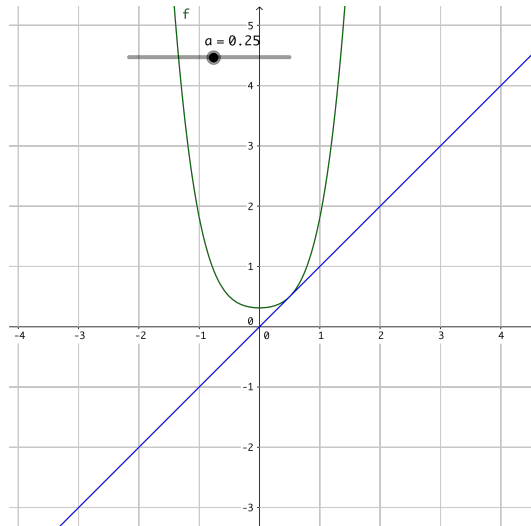
Dessignons, pour différentes valeurs de α , le graphe de la fonction f .

Sur Geogebra, on utilise le paramètre curseur. Voici ce que l'on obtient pour la valeur $\alpha = 0,5$:

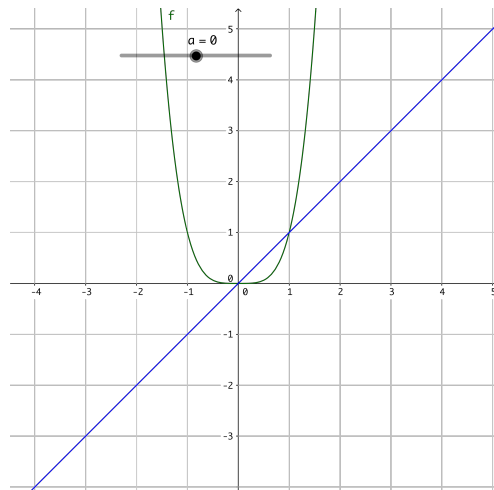


La courbe n'intersecte pas la diagonale, il n'y a pas de point fixe.

Lorsque $\alpha < 0,25$, deux points fixes apparaissent. La valeur $0,25$ est une valeur de transition pour laquelle la courbe est tangente à la première bissectrice :



Puis lorsque α est plus petit, on voit apparaître les deux points fixes, l'un répulsif l'autre attractif :



7.4. Apparition des cycles d'ordre 2

Nous avons vu que pour $\alpha = -1$, l'itération possède un cycle d'ordre 2. Pour quelles valeurs de tels cycles apparaissent-ils ?

On cherche donc x_0, x_1 tels que

$$x_1 = f(x_0), \quad x_0 = f(x_1).$$

On a alors

$$x_0 = f(f(x_0)), \quad x_1 = f(f(x_1)).$$

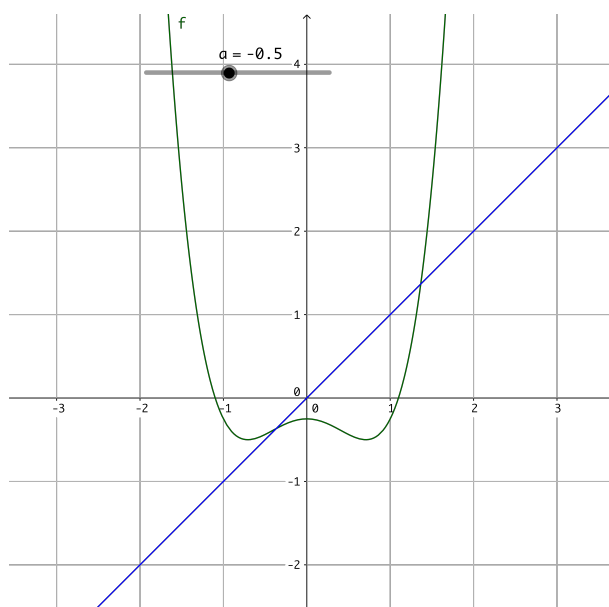
Les cycles d'ordre deux sont les points fixes du polynôme

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (x^2 + \alpha)^2 + \alpha \\ &= x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 + \alpha \end{aligned}$$

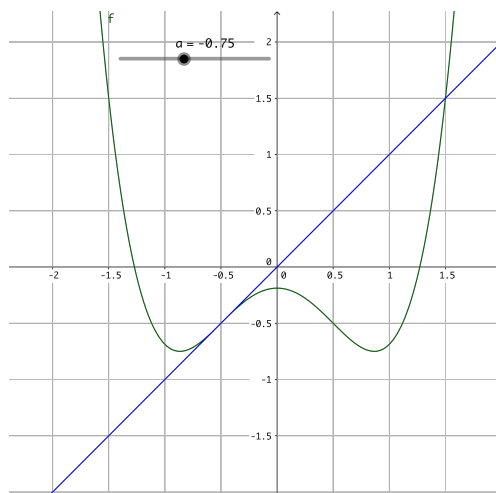
Nous notons $f^{(2)}$ ce polynôme :

$$f^{(2)}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 + \alpha$$

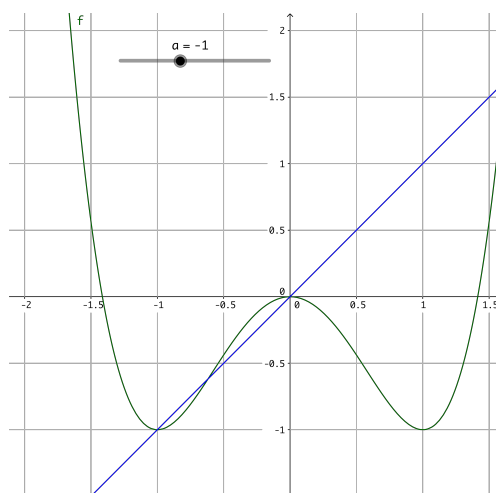
D'abord son graphe intersecte la première bissectrice en deux points, qui sont nos deux points fixes :



Puis pour $\alpha = -0,75$, on observe un phénomène nouveau. Il semble que la première bissectrice soit une tangente d'inflexion :



De telle sorte que pour $\alpha < -0,75$, apparaissent deux nouveaux points d'intersection avec la diagonale :

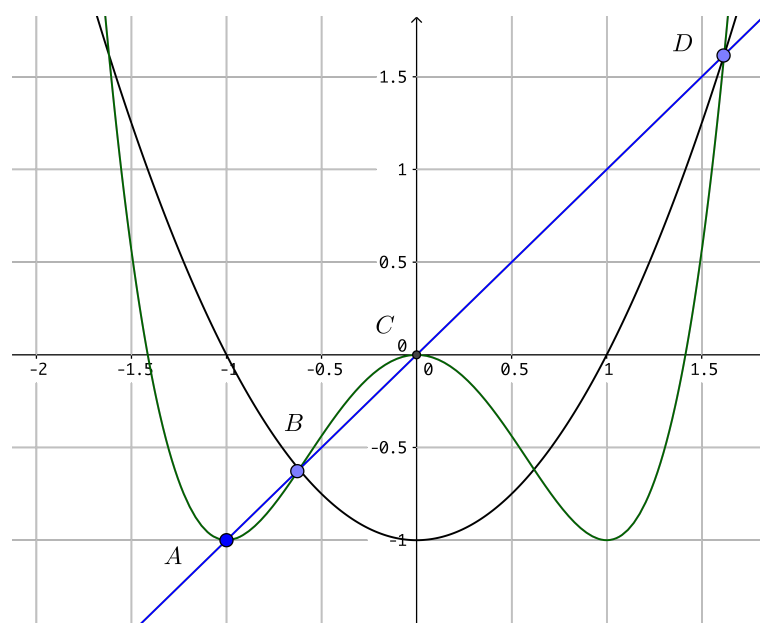


Les deux nouveaux points ne peuvent pas être des points fixes de f . En effet l'équation

$$f(x) = x$$

est de degré 2 et ne peut donc avoir plus de deux solutions. Il s'agit donc d'un cycle d'ordre 2.

La figure cachée dans l'apparition du cycle d'ordre 2 est :



Les points de triple intersection B, D sont les points fixes alors le couple A, C est le cycle d'ordre 2.

Théoreme 7.1. — La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \alpha$ possède un cycle d'ordre 2 si et seulement si $\alpha < 3/4$.

Démonstration. — Le cycle d'ordre 2 est donné par les solutions de l'équation de degré ⁽²⁾ 4 :

$$f^{(2)}(x) = x.$$

Nous savons que le nombre de racines ne peut changer que si le discriminant de l'équation s'annule ⁽³⁾, ce qui géométriquement correspond à une tangence entre le graphe de $f^{(2)}$ et la première bissectrice.

Je dis que le cycle d'ordre 2 n'apparaît pas lors d'une tangence ordinaire, mais sur une tangente d'inflexion. En effet, si deux points d'intersection apparaissaient à la suite d'une tangence ordinaire, au moment de la tangence la première bissectrice intersecterait la courbe $y = f^{(2)}(x)$ en trois points. Deux d'entre eux sont des points fixes de f donc le troisième serait donc également un point fixe de f , ce qui est impossible car l'équation

$$f(x) = x$$

est de degré 2 et ne possède par conséquent pas plus de deux racines.

Nous devons chercher la valeur de α pour laquelle la droite d'équation

$$y = x$$

est une tangente d'inflexion pour $g = f \circ f$. On a

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^2 + \alpha)^2 + \alpha \\ &= x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 + \alpha \\ g'(x) &= 4x^3 + 4\alpha x \\ g''(x) &= 12x^2 + 4\alpha \end{aligned}$$

2. La démonstration qui va suivre est due à Jack Souami alors qu'il était mon élève en Terminale.

3. voir *Mathématique Autrement, Algèbre*

On a le système d'équation

$$\begin{aligned}f(x) &= x \\g'(x) &= 1 \\g''(x) &= 0\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}x^2 + \alpha &= x \\4x^3 + 4\alpha x &= 1 \\\alpha &= -3x^2\end{aligned}$$

donc

$$x = -1/2, \alpha = -3/4.$$

Ce qui nous donne bien la valeur limite annoncée. $\square$

7.5. Le théorème de Feigenbaum-Landford-Lyubich

En 1978, le mathématicien Mitchell Feigenbaum parvint à calculer expérimentalement les valeurs pour lesquelles apparaissent les cycles de taille 2^n pour les petites valeurs de n :

taille	1	2	4	8	16	32
$\alpha \approx$	0,25	-0,75	-1,25	-1,368	-1,394	-1,4

On retrouve les valeur $\alpha = -0,25$ et $\alpha = -0,75$ qui correspondent respectivement à l'apparition de deux points fixes et du cycle d'ordre deux.

Interprétant α comme le temps, Feigenbaum introduisit la variable T_n du temps d'apparition d'un nouveau cycle :

$$T_1 = 0,75 - 0,25 = 0,5$$

$$T_2 = 1,25 - 0,75 = 0,5$$

$$T_3 = 1,368 - 1,25 = 0,118$$

$$T_4 = 1,394 - 1,368 = 0,026$$

$$T_5 = 1,4 - 1,394 = 0,06$$

Feigenbaum constata alors que la suite T_n s'approchait d'une suite géométrique au fur et à mesure que n grandissait :

$$T_2/T_1 = 1$$

$$T_3/T_2 = 0,236$$

$$T_4/T_3 = 0,220$$

$$T_5/T_4 = 0,231$$

Il conjectura l'existence d'une constante limite que l'on appelle depuis la *constante de Feigenbaum*. En 1982, Oscar Landford donna une démonstration assistée par ordinateur de son existence et ce n'est qu'en 1999 que Mikhail Lyubich démontra le résultat « à la main », sans ordinateur.

Malgré les progrès effectués au cours du siècle, l'étude des itérations quadratiques reste un sujet mystérieux. C'est un terrain qui permet d'expérimenter de nouvelles idées et le moment choisi pour terminer cette première partie !

Ainsi contrairement aux apparences trompeuses des premiers exemples, l'itération d'un polynôme quadratique est un sujet difficile qui n'a pas dit son dernier mot. Ce modèle est très probablement un modèle universel pour la compréhension de nombreux mouvements qui nous entourent comme ceux des planètes du système solaire.

Le mathématicien Michel Herman (1942-2000) qui a étudié toute sa vie des problèmes de mécanique céleste aimait citer cette phrase de Laplace : « *Ce que nous connaissons est peu de chose, ce que nous ignorons est immense.* »



M. Feigenbaum, O. Landford et M. Lyubich

PARTIE II

DIFFÉRENCES FINIES

CHAPITRE 1

LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

1.1. Les limites de la solitude

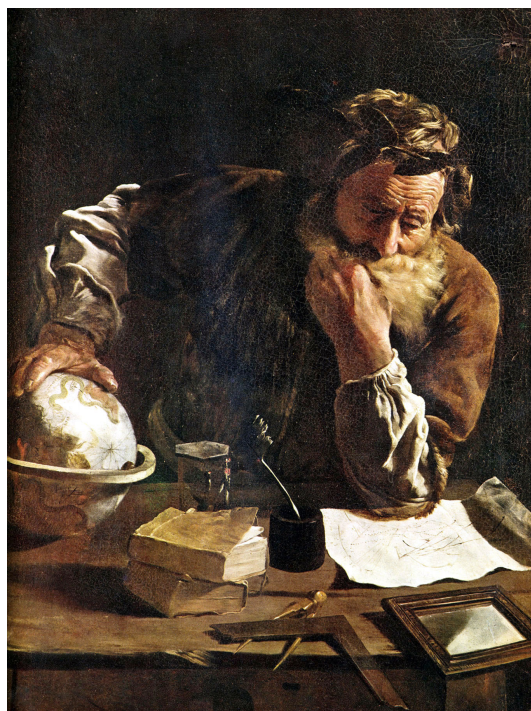
Être mathématicien c'est aimer la solitude. Seul devant sa feuille papier, le stylo à la main, le mathématicien dessine des figures, effectue des calculs, inlassablement, jusqu'à faire surgir le bon exemple, celui qui donnera naissance au concept, concept qui enfantera une théorie nouvelle. Mais une fois la découverte accomplie, tout ces efforts seraient vains s'il ne se trouvait quelqu'un avec qui la partager et, c'est souvent chez ses amis que le mathématicien trouve ses lecteurs les plus bienveillants.

Tandis que Voltaire raille les mathématiques d'Euler, la famille Bernoulli lit ses travaux avec intérêt. Les grandes découvertes ensuite célébrées sont souvent à leur époque connues d'un petit cercle d'amis.

De son vivant, Archimède échangeait avec son ami Conon. Mais lorsque ce dernier vint à mourir, le grand savant de Syracuse se retrouva seul, sans interlocuteur. Il venait pourtant d'accomplir une avancée décisive pour les mathématiques en faisant les premiers pas dans une science que Leibniz nommerait plus tard *le calcul différentiel*. Le géomètre italien voulait communiquer son œuvre ne serait-ce qu'à une personne, mais à qui ?

Il lui vint alors à l'esprit que Conon avait un élève passionné de mathématique : Dosithée. Archimède pris la décision de lui écrire : « *Lorsque j'eus appris que Conon, le seul de mes amis qui me restait encore, était mort (...), je pris la résolution de t'envoyer, comme je l'aurais fait à lui-même, un théorème de géométrie (...).* »

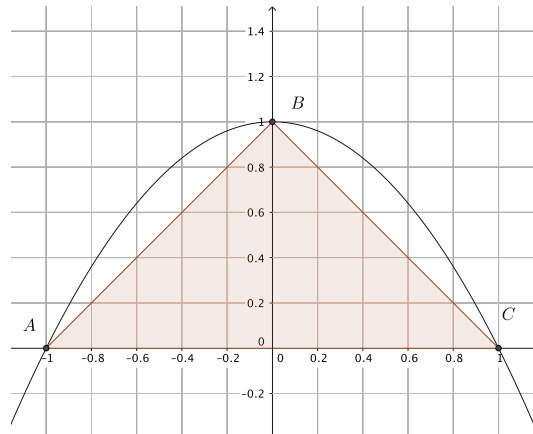
Archimède lui envoie alors le *traité de la parabole*, travail précurseur, dans lequel il démontre que : « (...) *un segment [de parabole] quelconque compris par une droite et par une parabole est égale à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.* »



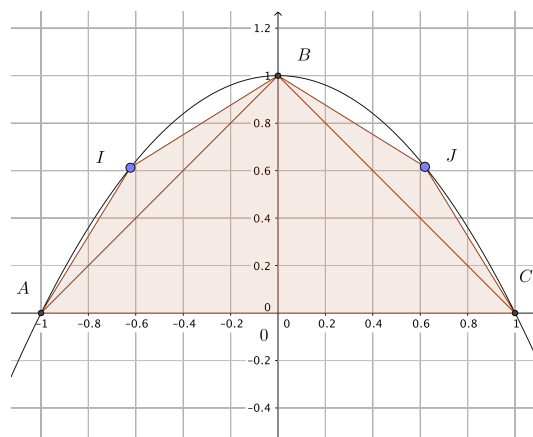
Archimède par Domenico Fetti (1589-1623).

1.2. Le traité de la parabole

La figure ci-dessous représente un triangle ABC d'une aire égale à 1. L'aire sous la parabole est légèrement plus grande. Archimède nous dit qu'elle est plus grande d'un tiers.



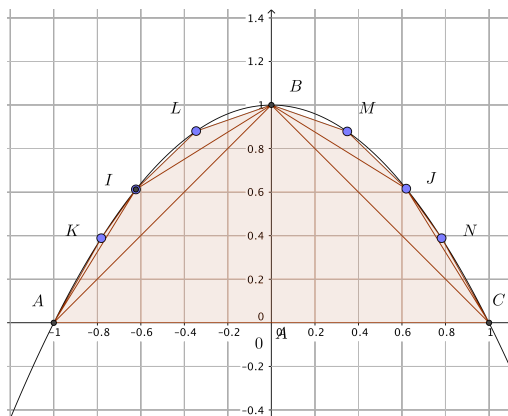
La démonstration d'Archimède est à la fois simple et profonde. Le savant introduit sur les arcs AB et BC des points I, J à équidistance des extrémités.



Il montre que l'aire du triangle AIB , et donc du triangle BJC , est le quart de l'aire de AOB . En faisant la somme des aires des triangles ABC , AIB et BJC , il trouve une meilleure approximation de l'aire de la parabole

$$1 + \frac{1}{4} = 1,25.$$

En répétant la construction avec les triangles AIB et BJC , on obtient des nouveaux triangles AKI , ILB , BMJ et JNC .



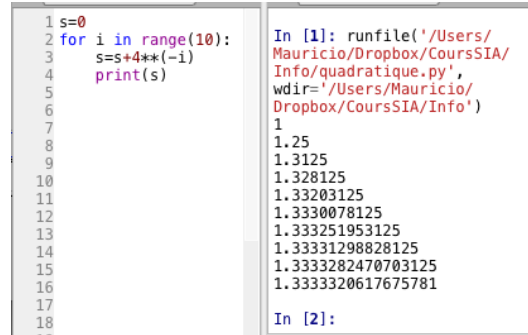
L'aire de ces triangles vaut le quart de l'aire précédemment calculée. On améliore ainsi l'approximation :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1,3125$$

De proche en proche, on obtient que l'aire comprise sous le polygone est la somme de la suite géométrique de raison $1/4$.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Un petit programme nous permet d'obtenir une estimation de la valeur :



```

1 s=0
2 for i in range(10):
3     s=s+4**(-i)
4     print(s)
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

```

```

In [1]: runfile('/Users/Mauricio/Dropbox/CoursSIA/Info/quadratique.py',
wdir='/Users/Mauricio/Dropbox/CoursSIA/Info')
1
1.25
1.3125
1.328125
1.33203125
1.3330078125
1.333251953125
1.33331298828125
1.3333282470703125
1.3333320617675781
In [2]:

```

On obtient donc les approximations

$$1 + \frac{1}{4} = 1,25$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \approx 1,328$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \approx 1,332$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \approx 1,333$$

Il semble effectivement que plus on augmente le nombre de découpages, plus l'aire du polygone s'approche de $1 + 1/3$, comme prédit par Archimède. L'aire sous la parabole est donc vue comme la limite d'un procédé infini de découpage. C'est cette méthode que l'on appelle aujourd'hui la *méthode d'exhaustion*.

C'est autour de cette construction que s'est développée l'étude des sommes des suites et de l'approximation de courbes par des polygones ou des lignes brisées. Nous allons donc procéder à l'étude systématique des sommes de suites, mais avant cela, nous allons voir comment Archimède a utilisé la méthode d'exhaustion pour approcher le nombre π .

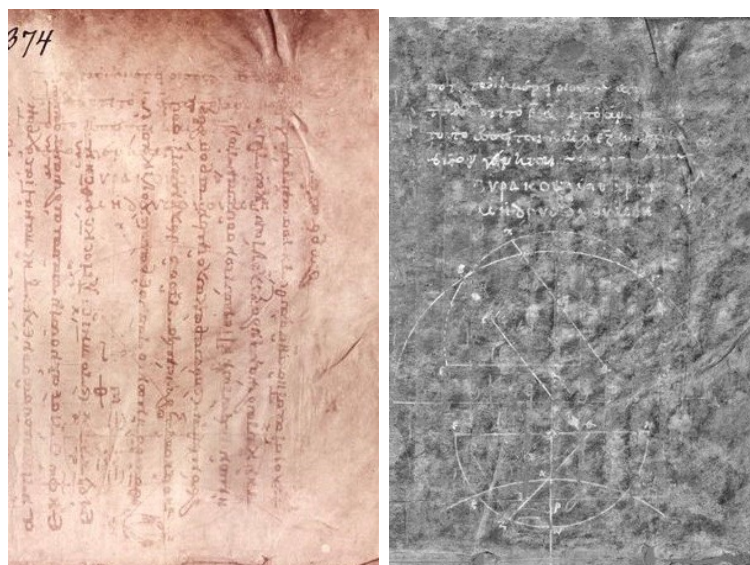
1.3. La méthode d'exhaustion dans l'œuvre d'Archimède

Les mathématiciens ont longtemps pensé que le travail d'Archimède sur la parabole était isolé au sein de son œuvre, la découverte du *palimpseste d'Archimède* a considérablement modifié cette vision.

Un palimpseste est la version antique du papier recyclé. On efface un parchemin que l'on considère dépourvu d'intérêt pour le remplacer par des écrits plus significatifs. Le texte dépourvu d'intérêt c'est celui d'Archimède comme nous allons le voir. Pour cela revenons deux siècles en arrière.

Constantin Tischendorf est un théologien du XIX^{ème} siècle notamment connu pour avoir découvert l'un des plus anciens évangiles canoniques, probablement de l'époque de Constantin. Lors d'un voyage en Orient, le savant allemand parcourt un livre ancien, un recueil de prières. Un examen attentif lui montre qu'il s'agit en fait d'un palimpseste, une œuvre originale ce cache donc derrière les prières. Tischendorf découpe une page du livre qu'il ramène en Europe. Il faut attendre une trentaine d'année, pour que l'historien des sciences Johan Ludvig Heiberg – notoirement connu pour son édition de la géométrie d'Euclide – tombe sur la page découpée. Heiberg reconnaît immédiatement que les inscriptions en filigrane sont tirées de l'œuvre d'Archimède ! L'historien retrouve la trace du manuscrit à Constantinople et révèle au monde entier des œuvres d'Archimède que l'on croyait perdues à jamais.

Archimède n'avait pas seulement calculé l'aire délimitée par une droite et une parabole, mais également l'aire et le périmètre d'un disque en l'approchant par un polygone régulier et avait ainsi obtenu la première suite d'approximation de π !



À gauche, une page du texte de prière du palimpseste et, à droite, sur la même page le texte d'Archimède mis en évidence par des méthodes d'imagerie.©

1.4. Les approximations de π d'après Archimède

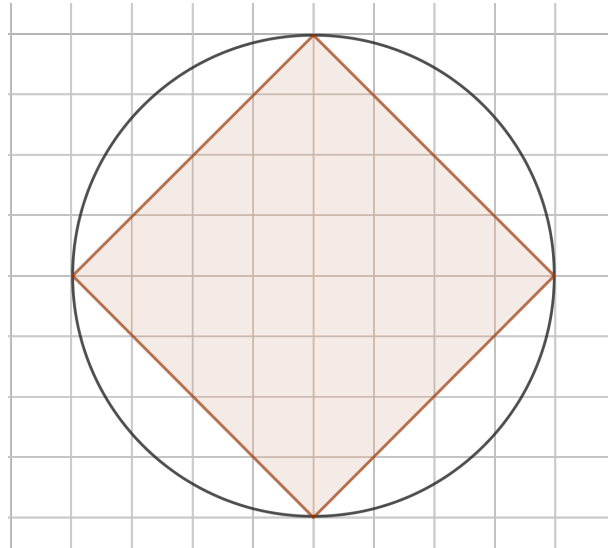
La formule qui donne le périmètre du cercle

$$P = 2\pi R$$

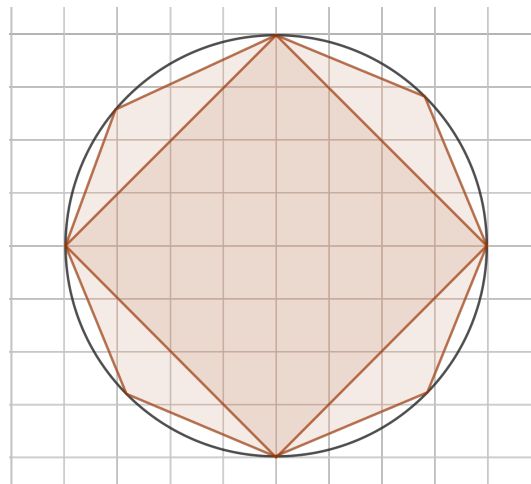
pourrait être prise comme définition du nombre π , qui est donc la moitié de la circonférence d'un cercle de rayon 1 dans un système d'unités préalablement choisi, à condition bien sûr de définir ce qu'est le périmètre!

La première approximation est basique. Inscrivons un carré à l'intérieur d'un cercle. Ses diagonales le découpent en quatre triangles rectangles isocèles et, d'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse de chacun d'entre eux vaut $\sqrt{2}$. Ceci nous donne une très mauvaise approximation :

$$\pi \approx 2\sqrt{2} \approx 2,8.$$

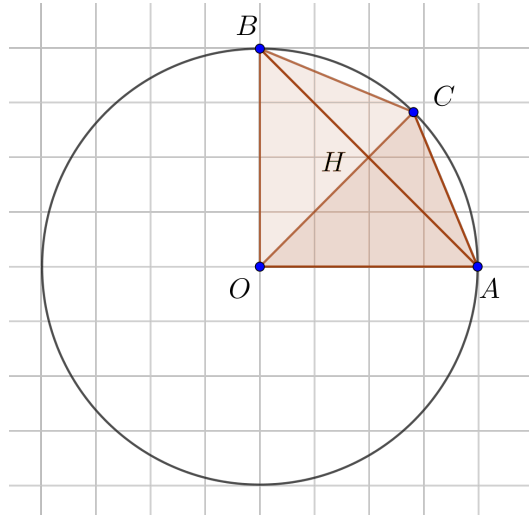


Divisons en deux chacun des angles au centre de manière à obtenir un octogone.



Le périmètre de l'octogone nous donne une meilleure approximation de π , calculons-la !

Pour cela, nous utilisons le théorème de Pythagore :



Pour calculer AC , nous calculons d'abord AH puis HC . Le segment $[AB]$ est la diagonale d'un carré de côté $[OA]$ donc

$$OB = 1, AB = \sqrt{2}$$

La longueur OH est la moitié de la diagonale de ce même carré, par conséquent :

$$OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comme le triangle OHA est isocèle en H , on a donc également

$$AH = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Finalement, comme $OC = 1$, on en déduit que

$$HC = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

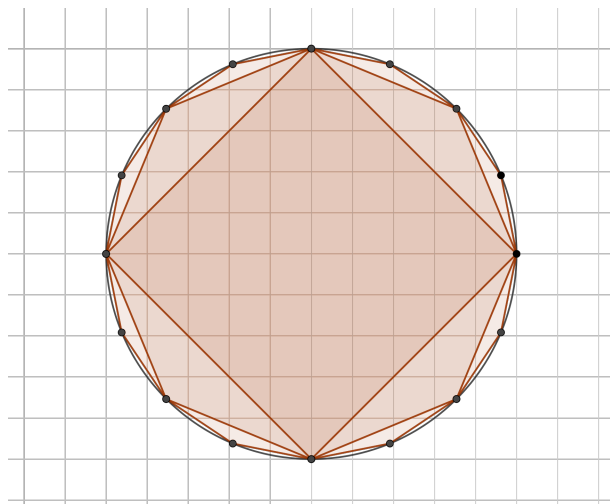
Il ne nous reste plus qu'à appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle ACH :

$$\begin{aligned} AC^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} \\ AC &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ &= 0,765\dots \end{aligned}$$

Ce qui nous donne déjà une meilleure approximation :

$$\pi \approx 4 \times AC = 3,061\dots$$

Initialement nous avions un carré, puis un octogone, nous pouvons maintenant répéter la même technique un polygone régulier à seize côtés, puis 32 côtés et ainsi de suite :



Nous obtenons à chaque étape une meilleure approximation de π .

Traisons maintenant le cas général. Un polygone régulier à 2^n côtés est composé de 2^n triangles, son périmètre vaut 2^n fois le côté extérieur de ce triangle que nous notons c_n .

Par exemple, nous venons de voir que

$$c_2 = AB = \sqrt{2}.$$

$$c_3 = AC = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Ce qui nous a donné les approximations

$$\pi \approx 2\sqrt{2}.$$

$$\pi \approx 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

La n -ième approximation de π sera donc donnée par

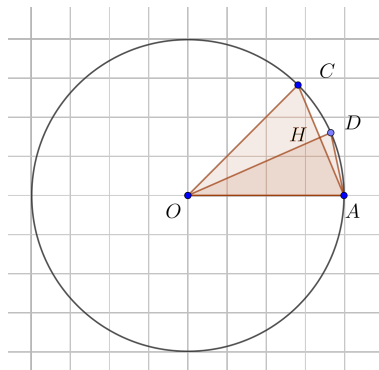
$$\pi \approx 2^{n-1}c_n.$$

Notre but est d'exprimer c_{n+1} en fonction de c_n comme nous l'avons fait lorsque nous avons calculé c_3 à partir de c_2 .

Nous disposons donc d'un polygone à 2^n sommets et nous obtenons le polygone suivant en divisant en 2 l'angle au sommet. Le polygone initial est composé de 2^n triangles élémentaires de côté

$$c_n = AC$$

que nous divisons en deux de manière à obtenir le nouveau polygone :



D'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
 OH^2 &= OC^2 - \frac{AC^2}{2} \\
 &= 1 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2 \\
 HD &= 1 - OH \\
 &= 1 - \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}} \\
 AD^2 &= AH^2 + HD^2 \\
 c_{n+1} &= \frac{c_n^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}\right)^2 \\
 c_{n+1} &= \frac{c_n^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}} + 1 - \frac{c_n^2}{4} \\
 c_{n+1} &= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons même intégrer cette formule de récurrence, grâce à une petite astuce. Posons :

$$s_n = \sqrt{4 - c_n^2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 c_{n+1} &= 2 - 2\sqrt{\frac{s_n^2}{4}} \\
 &= 2 - s_n \\
 s_{n+1} &= \sqrt{4 - c_{n+1}} \\
 &= \sqrt{2 + s_n}
 \end{aligned}$$

Autrement dit

$$s_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{ fois}}$$

En utilisant la relation

$$c_n = \sqrt{4 - s_n^2}.$$

Nous obtenons la formule dite *de Viète* :

$$\pi \approx 2^{n-1} c_n = 2^{n-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{(n-2) \text{ fois}}}$$

Pour les petites valeurs de n , on a ainsi :

$n =$	approximation de π	
2	$2\sqrt{2}$	$\approx 2,8$
3	$4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$\approx 3,06$
4	$8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\approx 3,12$
5	$16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$	$\approx 3,13$

C'est ainsi qu'Archimède découvrit ce qui est probablement la première méthode de calcul des décimales du nombre π .

CHAPITRE 2

SOMME D'UNE SUITE

2.1. La jeunesse de Gauss

La méthode d'exhaustion nous mène directement au calcul des sommes de suites. Par exemple, nous avons vu qu'Archimède fut amené à calculer la somme de la suite géométrique

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n}.$$

Selon la légende, alors qu'il n'était encore qu'un enfant, Gauss (1744-1808) fut confronté au problème de calculer la somme

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

lorsque soudain il s'écria 5050 !

La méthode, connue en fait depuis l'Antiquité, pour effectuer ce calcul est la suivante. On écrit la somme dans un sens puis dans l'autre et on additionne ensuite les deux lignes :

$$\begin{array}{rcccccccc} s = & 1 & + 2 & + 3 & + \dots & + 98 & + 99 & + 100 \\ s = & 100 & + 99 & + 98 & + \dots & + 3 & + 2 & + 1 \\ \hline 2s = & 101 & + 101 & + 101 & + & + 101 & + 101 & + 101 \end{array}$$

Le membre de droite est composé de cent fois le nombre 101. On a donc

$$2s = 100 \times 101 = 10100.$$

Ce qui nous donne bien

$$s = 5050.$$

Supposons maintenant que l'on doive calculer la somme jusqu'à un rang arbitraire :

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n.$$

On procède de la même façon :

$$\begin{array}{ccccccc} s = & 1 & +2 & +\dots & +n-2 & +n-1 & +n \\ s = & n & +n-1 & +\dots & +3 & +2 & +1 \\ \hline 2s = & n+1 & +n+1 & +\dots & +n+1 & +n+1 & +n+1 \end{array}$$

La somme est composée de n fois le terme $(n+1)$, ce qui nous donne

$$2s = n \times (n+1)$$

$$s = \frac{n(n+1)}{2}$$

En particulier pour $n = 100$, on retrouve bien

$$s = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Exercice 2.1. — Calculer la somme des nombres pairs jusqu'à 100 :

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100$$

Réponse. — On écrit

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 100 &= 2(1 + 2 + \cdots + 50) \\ &= 2 \left(\frac{50 \times 51}{2} \right) \\ &= 1250 \end{aligned}$$

Exercice 2.2. — Calculer la somme des nombres impairs jusqu'à 101 :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 101$$

Réponse. — *On écrit*

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + \cdots + 101 &= (1 + 0) + (1 + 2) + (1 + 4) + \cdots + (1 + 100) \\
 &= \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{101 \text{ fois}} + 2 + 4 + \cdots + 100 \\
 &= 101 + 2(1 + 2 + \cdots + 50) \\
 &= 101 + 50 \times 51 \\
 &= 1351
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant développer un formalisme pour mener facilement à bien ce type de calcul.

2.2. Somme d'une suite

Depuis l'Antiquité, on savait que de nombreux problèmes de calculs de longueurs, d'aires et de volumes se ramènent à calculer la somme d'une suite (u_n) :

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n.$$

Nous avons vu que pour la suite u de terme général :

$$u_n = n$$

c'est-à-dire

$$u = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots).$$

La suite de ses sommes

$$s = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots)$$

s'écrit sous la forme

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Comme cette opération est très importante, on lui associe un symbole, le « S » grec noté $\sum$ et appelé sigma :

$$s_n = \sum_{i=0}^n u_i,$$

ce que l'on lit *somme pour i allant de 0 à n des u_i* . Lorsque l'on trouve une formule qui exprime s_n en fonction de n , on dit que l'on a « intégré » la suite u .

La lettre i est un compteur qui prend successivement les valeurs $0, 1, 2$ et ainsi de suite jusqu'à n et nous devons additionner les termes ainsi obtenus.

La formule de la somme des entiers est donc :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Une somme ne commence pas nécessairement à 0, par exemple :

$$\sum_{i=3}^n u_i = u_3 + u_4 + \cdots + u_n$$

et ne s'arrête pas forcément à n :

$$\sum_{i=3}^{n-1} u_i = u_3 + u_4 + \cdots + u_{n-1}.$$

L'indice peut changer de nom

$$\sum_{i=3}^{n-1} u_i = \sum_{j=3}^{n-1} u_j = \sum_{k=3}^{n-1} u_k$$

On peut aussi changer l'indice

$$\sum_{i=3}^n u_i = \sum_{j=0}^{n-3} u_{j+3} = u_3 + u_4 + \cdots + u_n.$$

On pose $s = \sum u$ et on dit que s est la *somme de u* . Par exemple, pour

$$u = (1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$$

on a

$$su = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

Le n -ième terme de la suite $\sum u$ est donc la somme des $(n+1)$ premiers termes :

$$(\sum u)_n = \sum_{i=0}^n u_i.$$

Tout cela peut sembler bien innocent, mais le fait d'isoler la notion indépendamment de toute situation géométrique, puis de lui attribuer une notation comode est en soi une grande avancée.

2.3. Exercices simples

1. — Calculer les expressions suivantes :

$$\sum_{i=0}^4 i^2, \sum_{i=0}^3 i^3, \sum_{i=0}^0 5, \sum_{i=0}^1 5, \sum_{i=0}^2 5, \sum_{i=0}^3 5, \sum_{i=0}^n 5.$$

2. — Calculer les expressions suivantes :

$$\sum_{i=2}^4 i^2, \sum_{i=3}^3 i^3, \sum_{i=2}^0 5,$$

3. — Faire le changement d'indice indiqué.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^n i \text{ avec } i = j + 1 \\ &\sum_{i=0}^n i \text{ avec } i = n - j \\ &\sum_{i=0}^n i \text{ avec } i = j \end{aligned}$$

1. —

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 i^2 &= 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \\ \sum_{i=0}^3 i^3 &= 1 + 2^3 + 3^3 = 36 \\ \sum_{i=0}^0 5 &= 5 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^1 5 = 5 + 5 = 10$$

$$\sum_{i=0}^2 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=0}^3 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

$$\sum_{i=0}^n 5 = 5(n+1)$$

2. —

$$\sum_{i=2}^4 i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$$

$$\sum_{i=3}^3 i^3 = 3^3 = 27$$

La dernière expression n'a pas de sens.

3. — Attention aux bornes, par exemple dans le premier cas si $i = 0$ alors $j = -1$ et si $i = n$ alors $j = n-1$:

$$\sum_{i=0}^n i = \sum_{j=-1}^{n-1} (j+1) = \sum_{j=-1}^{n-1} j + n.$$

Dans le deuxième cas lorsque i augmente j diminue, il faut donc remettre les bornes dans le bon ordre

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i &= \sum_{j=0}^n (n-j) \\ &= n(n+1) - \sum_{j=0}^n j \\ &= n(n+1) - \sum_{i=0}^n i. \end{aligned}$$

Remarquez que de la dernière égalité, on tire

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Enfin et bien évidemment

$$\sum_{i=0}^n i = \sum_{j=0}^n j,$$

le nom du compteur ne joue aucun rôle !

2.4. Programmer une somme

Pour programmer la somme (s_n) d'une suite (u_n) , on utilise la propriété

$$s_n = s_{n-1} + u_n.$$

La somme des n -premiers termes d'une suite se code de manière très simple :

```
1 u=[1,2,3,4,5,6,7]
2 s=0
3 for i in range(len(u)):
4     s=s+u[i]
5 print("La somme de la suite u=",u,"vaut",s)
```

Nous avons utilisé la commande `len()` qui donne la longueur d'une liste. Dans notre exemple `len(u)` vaut 7 car u possède 7 éléments.

Si l'on veut calculer plusieurs sommes dans notre programme, on a intérêt à construire la fonction :

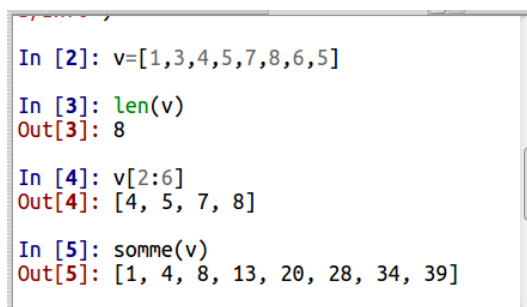
$$u \mapsto \sum u.$$

Ce que l'on peut faire de la façon suivante :

<pre>1 def somme(u): 2 s=[0] 3 for i in range(len(u)): 4 s.append(s[i]+u[i]) 5 return(s[1:len(s)]) 6 </pre>	Suites/Info') In [18]: v=[1,3,4,5,7,8,6,5] In [19]: somme(v) Out[19]: [1, 4, 8, 13, 20, 28, 34, 39]
--	---

Pour initialiser la somme, nous sommes partis de la valeur 0. Nous avons ensuite supprimé cette valeur, en utilisant une fonctionnalité de python : la possibilité de choisir les éléments d'une suite v pour des indices entre i et j , en posant $v[i :: j]$.

On peut tester ces fonctionnalités sur la console :



```
In [2]: v=[1,3,4,5,7,8,6,5]
In [3]: len(v)
Out[3]: 8
In [4]: v[2:6]
Out[4]: [4, 5, 7, 8]
In [5]: somme(v)
Out[5]: [1, 4, 8, 13, 20, 28, 34, 39]
```

Ce que l'on traduit par :

- [2] : $v = (1, 3, 4, 5, 7, 8, 6, 5)$
- [3] : v possède 8 termes
- [4] : $(v_2, v_3, v_4, v_5) = (4, 5, 7, 8)$
- [5] : $\sum v = (1, 4, 8, 13, 20, 28, 34, 39)$.

En particulier

$$\sum_{i=0}^5 v_i = 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 6 = 34,$$

$$\sum_{i=0}^7 v_i = 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 6 + 5 = 39.$$

Une autre possibilité est d'utiliser une définition réursive : d'abord pour $n = 1$ puis en exprimant s_n à l'aide de s_{n-1} :

```

1 def somme(u,n):
2     if n==0:
3         return(u[0])
4     else:
5         return(u[n]+somme(u,n-1))
6
7
8

```

In [2]: u=[1,2,3,4,5]
 In [3]: somme(u,3)
 Out[3]: 10
 In [4]:

2.5. Linéarité de la somme

Nous allons maintenant dégager les propriétés algébriques fondamentales de la somme. Nous savons par exemple que l'addition est commutative

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$$

et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

Ces deux propriétés sont vraies quel que soit le nombre de termes que l'on additionne :

Proposition 2.3. — Soit $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum(u + v) &= \sum u + \sum v \\ \sum \lambda u &= \lambda \sum u. \end{aligned}$$

Démonstration. — En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (u_i + v_i) &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n), \\ &= (u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n), \\ &= \sum_{i=0}^n u_i + \sum_{i=0}^n v_i \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \lambda u_i &= \lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n, \\ &= \lambda(u_1 + \cdots + u_n) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^n u_i.\end{aligned}$$

□

Les propriétés énoncées dans la proposition s'appellent *les propriétés de linéarité* du symbole $\sum$ bien que très élémentaires, elles sont fondamentales.

2.6. Sommes de suites arithmétiques.

1. — Exprimer les sommes de suites arithmétiques suivantes à l'aide du symbole $\sum$ puis les calculer.

$$\begin{aligned}2 + 4 + 6 + \cdots + 2n \\ 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 \\ 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n + 1\end{aligned}$$

2. — Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{i=0}^n (4i + 5), \sum_{i=0}^n (4i - 5).$$

3. — Exprimer la somme d'une suite arithmétique en fonction de sa raison et de son premier terme.

1. — On utilise l'identité fondamentale :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n &= \sum_{i=1}^n 2i \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n i = n(n+1) \\
 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 &= \sum_{i=0}^n (2i + 1) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 \\
 &= n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2
 \end{aligned}$$

Cette dernière identité est assez remarquable, par exemple pour $n = 6$, on trouve :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$$

ou encore

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 10^2.$$

Pour la dernière somme, on trouve :

$$\begin{aligned}
 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n + 1 &= \sum_{i=1}^n (3i + 1) \\
 &= 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= \frac{3n(n+1)}{2} + n \\
 &= \frac{n(3n+5)}{2}
 \end{aligned}$$

On prendra soin de vérifier les formules pour $n = 1$ et $n = 2$. Remarquez qu'il n'est pas évident a priori que les expressions $n(n+1)/2$ ou $(3n^2 + 5n)/2$ soient à valeurs entières.

2. — Les propriétés de linéarité nous donnent :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (4i + 5) &= 4 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 5 \\ &= 2n(n+1) + 5(n+1) \\ &= 2n^2 + 7n + 5\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (4i - 5) &= 4 \sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^n 5 \\ &= 2n(n+1) - 5(n+1) \\ &= 2n^2 - 3n - 5\end{aligned}$$

3. — Notons a la raison et b le premier terme de sorte que la suite est de la forme

$$u_n = an + b.$$

Nous devons calculer

$$\sum_{i=0}^n (ai + b).$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (ai + b) &= a \sum_{i=0}^n i + b \sum_{i=0}^n 1 \\ &= \frac{an(n+1)}{2} + b(n+1) \\ &= \frac{(an + 2b)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Nous avons démontré la

Proposition 2.4. — Soit (u_n) une suite arithmétique de raison a . On a

$$\sum_{i=0}^n u_i = a \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)u_0$$

Inutile de retenir cette formule ! Comme nous l'avons vu c'est une conséquence immédiate de la linéarité de $\sum$ et de la formule :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cette somme est particulièrement simple, mais peut-on en calculer d'autres ?

Par exemple, est-il possible de connaître la valeur de

$$\sum_{i=0}^{100} i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + \cdots + 10\,000$$

La réponse est oui. Mais pour cela, il nous faut introduire un nouvel outil.

CHAPITRE 3

LE PRINCIPE DE LEIBNIZ

3.1. Louis XIV, Leibniz et l'Égypte

Depuis le début du XVII^e siècle, l'Europe est marqué par le renforcement de l'absolutisme et, fatalement, la guerre fait rage. Pendant l'année 1672, alors que Louis XIV pense intensifier ses guerres de conquête, le prince de Mayence envoie l'un de ses diplomates Leibniz (1646–1716) à Paris. Le but de Leibniz est simple : convaincre le jeune roi d'entamer une conquête de l'Égypte ! Diversion qui permettrait de mettre une pause aux guerres et à la barbarie. Ambition diplomatique dérisoire, la guerre reprend de plus belle dès l'automne.

À Paris Leibniz fait la connaissance de Christian Huygens. Membre de la très récente Académie des sciences, Huygens est l'un des plus éminents mathématiciens de l'époque. Il initie Leibniz aux mathématiques, l'incite à lire les œuvres de Pascal et, en particulier, le célèbre *triangle arithmétique*...



Leibniz (1646–1716).

3.2. Le problème de Huygens

Dans *le traité du triangle arithmétique*, Pascal étudie les sommes de puissances comme :

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots$$

Huygens soumet à Leibniz un problème simple ⁽¹⁾. Nous savons que

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. L'anecdote qui va suivre est due à Leibniz.

Que se passe-t-il si l'on additionne les inverses des membres de droite ?

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{3} &= \frac{4}{3} \\
 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{3}{2} \\
 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} &= \frac{8}{5} \\
 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= ?
 \end{aligned}$$

Existe-t-il une formule générale ? Tel est le problème posé par Huygens.

Avant sa venue à Paris, Leibniz s'était déjà intéressé à de tels calculs, mais à la lecture de Pascal, il découvre un principe fondamental fondé sur une opération autre que la somme et qui va jouer un rôle décisif dans l'invention du calcul infinitésimal : la différence.



Christian Huygens (1629–1695).

3.3. Solution du problème de Huygens

Supposons que l'on veuille calculer une somme

$$s = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Si l'on parvient à écrire chacun des v_i sous la forme

$$v_i = u_{i+1} - u_i$$

alors

$$s = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n).$$

On voit que presque tous les termes s'annulent deux à deux : u_1 dans la première parenthèse avec $-u_1$ de la seconde, u_2 dans la deuxième parenthèse avec $-u_2$ de la troisième et ainsi de suite. Les seuls termes qui vont subsister sont le premier et le dernier donc

$$s = u_{n+1} - u_0$$

C'est ce que l'on appelle aujourd'hui le *principe télescopique*, mais je préfère l'appeler *principe de Leibniz*.

Huygens demande de calculer

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{i(i+1)}$$

D'après le principe de Leibniz, il faut donc trouver une suite (u_n) telle que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n(n+1)}.$$

On dira que la suite u *intègre* $(2/n(n+1))$ puisqu'elle permet de trouver l'expression de sa somme.

Il n'y a pas de « recette » pour intégrer une telle suite. Leibniz fut chanceux car en essayant

$$v_n = \frac{1}{n}$$

il trouva la solution à un coefficient près :

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Il faut donc poser $u = -2v$. Par exemple :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= 2 \times \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right) \\ &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la *formule de Leibniz* :

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{i(i+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

Lorsque n est grand $n/(n+1) \approx 1$, donc la somme est proche de 2. On trouve par exemple pour $n = 9$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{45} = 1,8.$$

3.4. Différence d'une suite

Le principe de Leibniz nous dit que l'opération contraire de la somme consiste à prendre la *différence* Δu définie par :

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$$

Cette différence calcule l'accroissement de la suite u et joue un rôle analogue à la dérivée pour les polynômes. Nous allons l'étudier de manière systématique, ce qui va nous ouvrir la porte du calcul des infiniments petits...

Prenons par exemple la suite des entiers

$$u = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

sa différence est constante et vaut

$$\Delta u = (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

Ce qui signifie que l'accroissement de la suite u est constant égal à 1. Plus généralement la différence d'une

suite arithmétique

$$(u_n) = (an + b)$$

est constante égale à a :

$$u_{n+1} = u_n + a$$

$$u_{n+1} - u_n = a.$$

Exercice 3.1. — Que peut-on dire d'une suite u telle que sa différence Δu est positive ?

Réponse. — *Elle est croissante.*

Exercice 3.2. — Quelles sont les suites dont la différence est égale à zéro ?

Réponse. — *Par définition $\Delta u = 0$ signifie que*

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

donc que $u_{n+1} = u_n$ pour tout n . Les suites dont la différence est nulle sont donc les suites constantes.

Voici un programme pour calculer la différence d'une suite :

```
1 def df(u):
2     v=[]
3     for i in range(len(u)-1):
4         v.append(u[i+1]-u[i])
5     return v
6
7
```

3.5. Exercices simples

1. — Résoudre $\Delta u = (1, 2, 3, 4, 5)$ avec condition initiale $u_0 = 0$

2. — Calculer $\Delta(2^n)$

3. — Plus généralement, on choisit $x \in \mathbb{R}$ et on considère la suite géométrique

$$u = (x^n) = (1, x, x^2, x^3, \dots).$$

Calculer Δu .

4. — Le seul polynôme vérifiant

$$f'(x) = x, \quad f(0) = 0$$

est $x^2/2$. Cherchons l'analogie pour les suites : résoudre l'équation $\Delta u = (n)$ avec $u_0 = 0$.

5. — Soit (u_n) une suite telle que

$$\Delta u = (n^2), \quad u_0 = 0.$$

Calculer les 7 premiers termes de la suite.

1. —

$$u_1 = u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 1 + 2 = 3$$

$$u_3 = u_2 + 3 = 6$$

$$u_4 = u_3 + 4 = 10$$

$$u_5 = u_4 + 5 = 15$$

2. —

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - 2^n \\ &= 2^n(2 - 1) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

La suite (2^n) est en fait l'unique solution de l'équation :

$$\Delta u = u, \quad u_0 = 1$$

3. —

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= x^{n+1} - x^n \\ &= x^n(x - 1) \\ &= u_n(x - 1) \end{aligned}$$

Toute suite géométrique de raison x est solution de l'équation :

$$\Delta u = (x - 1)u$$

4. — On cherche une suite (u_n) telle que

$$u_{n+1} - u_n = n$$

autrement dit

$$u_{n+1} = u_n + n,$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= u_1 + 2 = 1 + 2 = 3, \\ u_3 &= u_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6, \\ u_4 &= u_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \\ u_5 &= u_4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \\ &\dots \\ u_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (i - 2) + (i - 1) + i \\ &= \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

La suite dont la différence vaut n est la suite des sommes des n premiers entiers. Remarquons que pour n très grand $\frac{n(n+1)}{2}$ vaut à peu près $n^2/2$.

5. — Soit (u_n) une suite telle que

$$u_{n+1} - u_n = n^2.$$

On a alors la récurrence d'ordre 1.

$$u_{n+1} = u_n + n^2,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 + 1^2 = 1 \\ u_2 &= 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5, \\ u_3 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \\ u_4 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \\ u_5 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 \end{aligned}$$

La suite dont la différence vaut n est la suite des sommes des carrés de n premiers entiers

3.6. Propriétés de linéarité de Δ

Nous avons vu que l'opération $\sum$ possède des propriétés dites de linéarité qui découlent l'associativité de l'addition et de la distributivité par rapport à la multiplication. Pour le symbole Δ , on a des propriétés similaires :

Proposition 3.3. — *Pour toute suites (u_n) , (v_n) et tout réel λ , on a :*

$$\begin{aligned} \Delta(u + v) &= \Delta u + \Delta v \\ \Delta \lambda u &= \lambda \Delta u. \end{aligned}$$

Démonstration. — En effet :

$$\begin{aligned} \Delta(u + v)_n &= (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n), \\ &= (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n), \\ &= \Delta u + \Delta v \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (\Delta \lambda u)_n &= \lambda u_{n+1} - \lambda u_n \\ &= \lambda(u_{n+1} - u_n) \\ &= \lambda(\Delta u)_n. \end{aligned}$$

□

Exercice 3.4. — Montrer à l'aide de la proposition que si deux suites u, v ont la même différence alors elles sont égales à une constante près :

$$\Delta u = \Delta v \implies u = v + \text{constante}$$

Etudier la réciproque.

Réponse. — On a

$$\begin{aligned} \Delta u = \Delta v &\iff \Delta u - \Delta v = 0 \\ &\iff \Delta(u - v) = 0 \iff u - v = \text{constante} \end{aligned}$$

Ce qui démontre à la fois la proposition et sa réciproque.

3.7. Le principe de Leibniz revisité

Nous avons vu sur les exemples que la somme est inverse de la différence. Par exemple si

$$\Delta u = (1, 3, 5, 7, 9), \quad u_0 = 0$$

alors

$$u = (1, 4, 9, 16, 25)$$

À l'aide des opérations $\sum$ et Δ on peut formaliser le principe de Leibniz :

Proposition 3.5. — Si $v = \sum u$ alors pour tout entier n

$$(\Delta v)_{n+1} = u_n.$$

Réciproquement si $\Delta v = u$ alors

$$(\sum u)_n = v_{n+1} - v_0$$

Démonstration. — Supposons que (v_n) soit définie par

$$v_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

On a alors

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1}.$$

Par conséquent

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1}.$$

Ce qui démontre la première affirmation. Inversement si

$$u_n = v_{n+1} - v_n$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n u_i &= v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \cdots + v_{n+1} - v_n \\ &= -v_0 + v_1 - v_1 + v_2 - v_2 + v_3 + \cdots - v_n + v_{n+1} \\ &= -v_0 + v_{n+1} \end{aligned}$$

□

3.8. Exercices

1. — Considérons $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n > 0$. Calculer Δu puis $\sum \Delta u$.

2. — Vérifier la formule trouvée précédemment pour $n = 2$ et $n = 3$.

1. — On pose $v = \Delta u$. Pour $n > 0$, on a :

$$v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

D'après le principe de Leibniz, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_n &= u_{n+1} - u_1. \\ \sum_{i=1}^n \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

2. — On trouve successivement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^1 \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} &= \frac{3}{4}, \\ \sum_{i=1}^2 \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} &= \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{8}{9}, \\ \sum_{i=1}^3 \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} &= \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} = \frac{15}{16},\end{aligned}$$

3.9. Somme d'une suite géométrique

On a

$$\begin{aligned}1 + 2 &= 4 - 1 \\ 1 + 2 + 4 &= 8 - 1 \\ 1 + 2 + 4 + 8 &= 16 - 1 \\ 1 + 2 + 4 + 8 + 16 &= 32 - 1\end{aligned}$$

Il semblerait donc que

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Ce qui nous rappelle le principe télescopique. Nous avons remarqué que (2^n) est l'unique solution de

$$\Delta u = u, \quad u_0 = 1$$

en effet

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n.$$

Le principe télescopique nous donne alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n 2^i &= \sum_{i=0}^n (2^{i+1} - 2^i) \\ &= 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Ce qui est bien la formule que nous avons devinée.

Calculons plus généralement, la différence d'une suite géométrique. On a

$$\Delta(x^n) = (x - 1)(x^n),$$

en effet

$$x^{n+1} - x^n = (x - 1)x^n.$$

Le principe télescopique nous donne alors

$$\sum_{i=0}^n (x - 1)x^i = x^{n+1} - 1.$$

Par linéarité de $\sum$, on a aussi

$$\sum_{i=0}^n (x - 1)x^i = (x - 1) \sum_{i=0}^n x^i.$$

Nous avons donc montré que

$$(x - 1) \sum_{i=0}^n x^i = x^{n+1} - 1$$

d'où en divisant les deux membres de l'égalité par $(x - 1)$, il vient :

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Proposition 3.6. — Pour tout réel $x \neq 1$, on a

$$\boxed{\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}.$$

On a bien sûr

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Pour éviter les erreurs de signes, on peut utiliser l'expression de droite lorsque $x > 1$ et celle de gauche lorsque $0 < x < 1$.

Exemple 3.7. — Prenons $x = 2$. Comme on l'a vu

$$\sum_{i=0}^n 2^i = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Par exemple :

$$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512 = 2^{10} - 1 = 1023.$$

Remarquons que la somme est dominée par le dernier terme 512 qui vaut à lui tout seul plus de la moitié de 1023.

Exemple 3.8. — Prenons $x = 1/2$. On trouve

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{-i}} = \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-1}} = 2 - 2^{-n}.$$

car $1 - 2^{-1} = 1/2$. Par exemple

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 2 - 2^{-6} = 2 - \frac{1}{64}.$$

Cette fois-ci la somme est dominée par les premiers termes : le premier terme contribue à plus de 50% de la somme finale.

Les deux exemples précédent sont de nature complètement différente. Dans le premier cas, les termes sont de plus en plus grand et dans la formule, on a

$$x^{n+1} - 1 \approx x^{n+1}$$

De telle sorte que pour n grand, la somme vaut environ

$$\frac{x^{n+1}}{x - 1} = 2^{n+1}$$

Dans le second cas, lorsque n est grand x^{n+1} est petit de sorte que la somme vaut environ

$$\frac{1}{1 - x} = 2$$

Plus généralement, pour de grandes valeurs de n :

$$\sum_{i=0}^n x_i = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1$$

$$\sum_{i=0}^n x_i = \frac{x^{n+1}}{x-1} \quad \text{si } |x| > 1$$

Cette formule nous permet aisément de calculer la somme d'une suite géométrique.

Exercice 3.9. — Calculer (on suppose que les termes sont en progression géométrique)

$$2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 13122$$

Réponse. — *C'est la somme d'une suite géométrique de premier terme 2, donc*

$$u_n = 2 \times 3^n.$$

Cherchons la valeur de n correspondant à 13122. On a :

$$2 \times 3^n = 13122$$

$$3^n = 6561$$

Les puissances de 3 sont

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Donc $n = 8$. Nous avons

$$\sum_{i=0}^8 2 \times 3^n = 2 \sum_{i=0}^8 3^n = 2 \frac{3^9 - 1}{3 - 1} = 3^9 - 1 = 19682$$

3.10. La formule de Pascal

Le triangle de Pascal est aujourd'hui bien connu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & & & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & & & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & & & & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 &
 \end{array}$$

Pascal l'appelait *triangle arithmétique*. Chaque nombre est la somme de ceux sur la ligne précédente sur la même colonne et sur la colonne immédiatement à gauche :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & & & & \\
 & & 1 & 3 & \longrightarrow & 3 & 1 \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 &
 \end{array}$$

Le triangle permet d'obtenir les identités remarquables (la première n'a aucun intérêt, c'est juste pour l'esthétique) :

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

etc.

Dans son célèbre mémoire de 1654, Pascal obtint des formules qui attirèrent l'attention de Huygens :

$$4 \sum_{i=1}^n i^3 + 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i = (n+1)^4 - n - 1$$

$$5 \sum_{i=1}^n i^4 + 10 \sum_{i=1}^n i^3 + 10 \sum_{i=1}^n i^2 + 5 \sum_{i=1}^n i = (n+1)^5 - n - 1$$

etc.

Dans la première égalité prenons $n = 2$, il vient

$$4(1^3 + 2^3) + 6(1^2 + 2^2) + 4(1 + 2) = 36 + 30 + 12 = 78$$

qui est bien égal à

$$3^4 - 3 - 1 = 81 - 4 = 78.$$

C'est probablement en étudiant ces exemples que Leibniz fut conduit à son principe. Considérons, en effet, la suite de terme général

$$u_n = (n+1)^4$$

et calculons sa différence. On a

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= (n+1)^4 - n^4 \\ &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$4 \sum_{i=1}^n i^3 + 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 = (n+1)^4 - 1.$$

Compte tenu du fait que $\sum_{i=1}^n 1 = n$ cela redonne la première formule et on démontre de même les autres formules de Pascal.



Cette statue de Blaise Pascal (1623–1662) située tour Saint-Jacques à Paris commémore les expériences menées par le savant en 1648. Pascal aurait calculé la différence de pression atmosphérique entre le sommet de la tour et sa base.

CHAPITRE 4

QUADRATURE DE LA PARABOLE

4.1. Dissectons la parabole

Le problème de calcul d'aire sous une parabole étudié par Archimède porte le nom de *quadrature de la parabole*. Les travaux d'Archimède connurent une postérité extraordinaire, ils furent poursuivis par les savants de Bagdad puis en Europe, à partir de la fin de la Renaissance. Ils sont l'un des piliers des mathématiques.

La méthode d'exhaustion nous dit que si l'on prend suffisamment de points sur une courbe et qu'on les joint, on obtient une courbe polygonale très proche de la courbe initiale. Une variante plus moderne de la méthode d'Archimède consiste à prendre notre segment de parabole comme le graphe d'une fonction :

$$[-1, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto x^2.$$

Prenons des valeurs de x en progression arithmétique de raison 0.1 et de premier terme -1 :

$$x = (-1, -0.9, -0.8, \dots, 0.8, 0.9, 1)$$

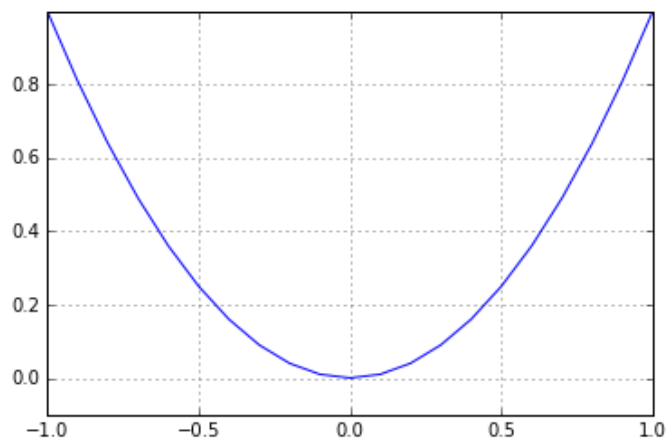
Les images de ces points par f nous donnent 21 valeurs :

$$\begin{aligned} y &= ((-1)^2, (-0.9)^2, (-0.8)^2, \dots, (0.8)^2, (0.9)^2, 1^2) \\ &= (1, 0.81, 0.64, \dots, 0.49, 0.64, 1) \end{aligned}$$

Effectuons un programme pour obtenir la ligne polygonale construite sur ces valeurs :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 x=np.arange(-1,1.1,0.1)
4 y=x**2
5 plt.plot(x,y)
```

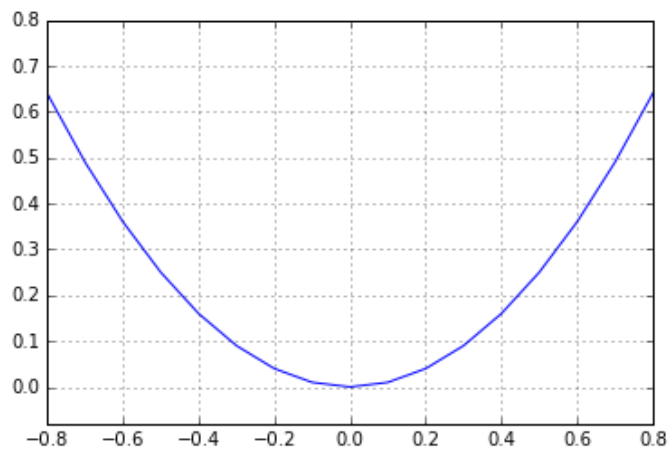
La commande `np.arange(a, b, r)` permet de construire les termes $< b$ d'une suite géométrique de raison r et de premier terme a . Le résultat est étonnant :



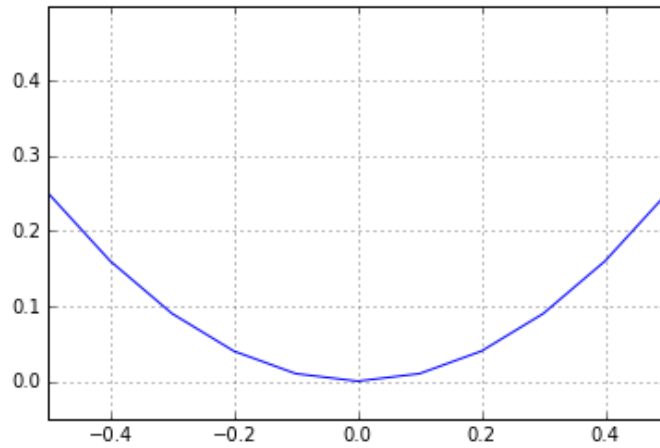
On a l'impression qu'il s'agit d'une parabole ! C'est en fait d'une ligne polygonale obtenue par exhaustion de la parabole à partir des 21 points (x_i, y_i) .

Effectuons des zooms successifs, jusqu'à apercevoir les « morceaux » de notre courbe.

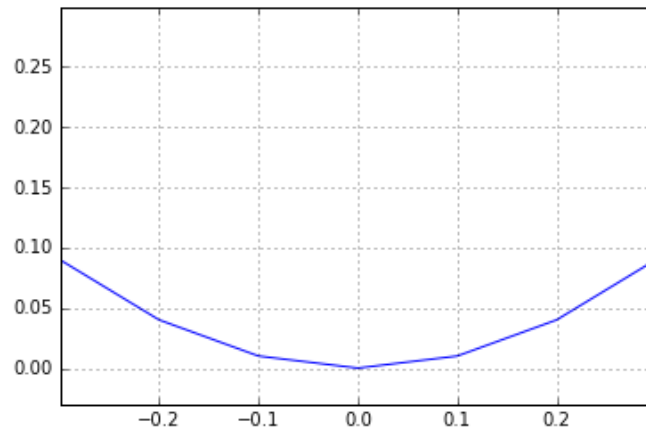
Le premier zoom nous donne toujours l'impression d'avoir une parabole :



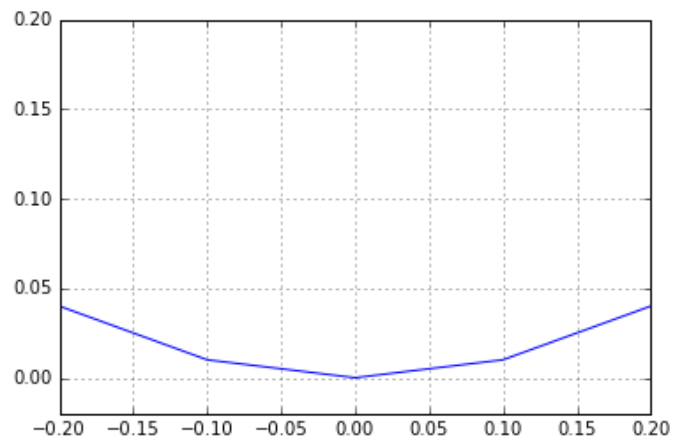
Mais déjà au deuxième, on commence à voir des irrégularités :



Sur les figures suivantes cela ne fait plus de doute.
D'abord 6 segments de droite :



Et sur cette dernière figure, on distingue très nettement 4 segments de droite :



4.2. Le théorème d'Archimède revisité

Nous pouvons maintenant appliquer la méthode d'exhaustion au calcul de l'aire sous la parabole, mais au lieu d'approcher l'aire par des polygones, nous allons tout simplement l'approcher par des rectangles.

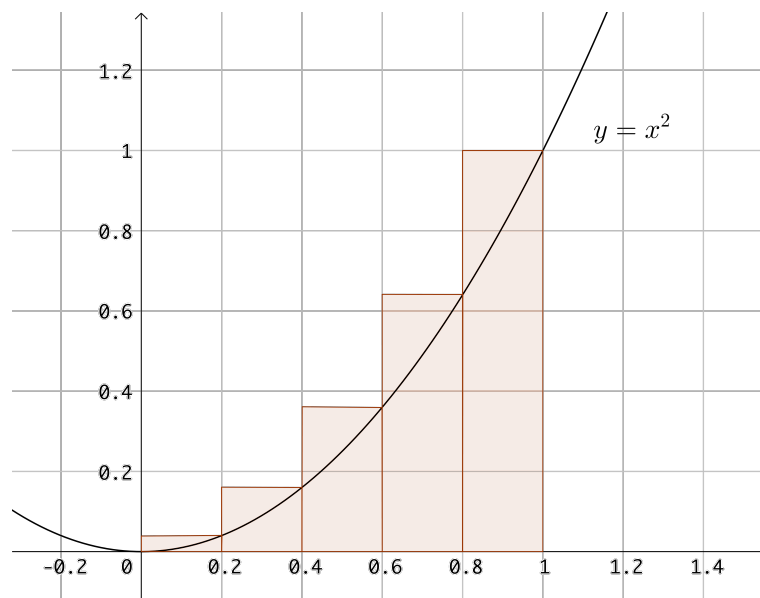
Considérons la fonction

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

et approchons l'aire comprise sous la parabole entre 0 et 1. D'après Archimède celle-ci vaut $1/3$. Pour vérifier, nous découpons l'intervalle $[0, 1]$ en cinq parties égales :

$$[0, 1/5], [1/5, 2/5], [2/5, 3/5], [3/5, 4/5], [4/5, 1]$$

En prenant les images de ces intervalles on obtient cinq rectangles :



En première approximation, l'aire sous la parabole est la somme de cinq rectangles :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_5 &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} \times \frac{2^2}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5} \times \frac{4^2}{5^2} + \frac{1}{5} \times 1^2 \\ &= \frac{1}{5^3} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)\end{aligned}$$

Si on divise l'intervalle en 10 parties égales, on serait de même conduit à la somme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{10} &= \frac{1}{10^3} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2) \\ &= \frac{1}{10^3} \sum_{i=1}^{10} i^2\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi confrontés au problème du calcul de la somme des carrés de nombres entiers

$$\sum_{i=1}^n i^2.$$

La somme des aire de ces rectangles est plus grande que l'aire sous la parabole. On peut maintenant prendre des rectangles en dessous de la parabole :

Mais cette aire n'est autre que

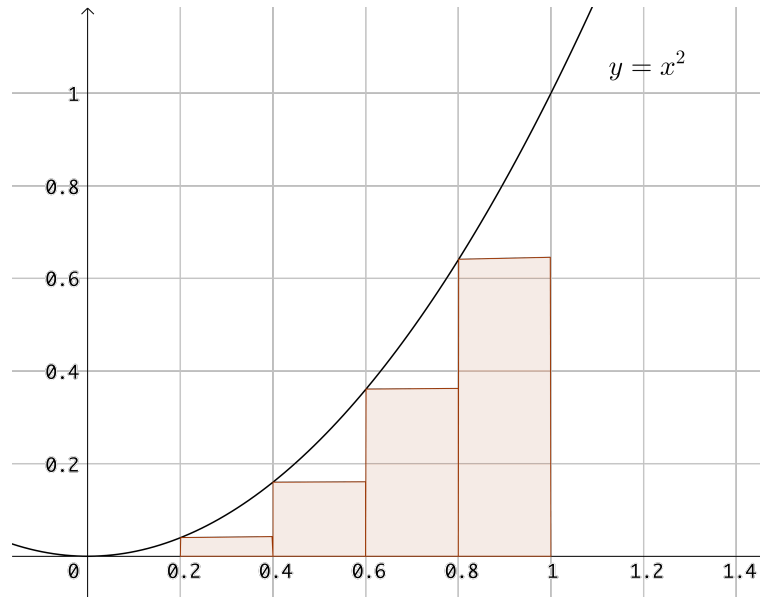
$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_3 &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} \times \frac{2^2}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5} \times \frac{4^2}{5^2} \\ &= \frac{1}{5^3} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\ &= \frac{1}{5^3} \sum_{i=1}^4 i^2\end{aligned}$$

Autrement dit l'aire $\mathcal{P}$ sous la parabole admet l'encadrement

$$\frac{1}{5^3} \sum_{i=1}^4 i^2 \leq \mathcal{P} \leq \frac{1}{5^3} \sum_{i=1}^5 i^2.$$

De même pour dix rectangles

$$\frac{1}{10^3} \sum_{i=1}^9 i^2 \leq \mathcal{P} \leq \frac{1}{10^3} \sum_{i=1}^{10} i^2.$$



Dans le premier cas la différence entre les « grands rectangles » et les « petits rectangles » vaut

$$\begin{aligned} \frac{1}{5^3} \sum_{i=1}^5 i^2 - \frac{1}{5^3} \sum_{i=1}^4 i^2 &= \frac{5^2}{5^3} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Dans le second cas cette différence vaut $1/10$. On voit ainsi que les deux aires s'approchent l'une de l'autre et donnent une approximation de l'aire sous la parabole. En fait, le découpage en rectangles de plus en plus petits peut servir de définition de l'aire sous la parabole !

Exercice 4.1. — Écrire un programme python pour calculer la somme des carrés. En déduire des approximations de l'aire comprise sous la parabole d'équation $y = x^2$ entre 0 et 1.

Réponse. —

```

1 def somme(n):
2     if n==1:
3         return(1)
4     else:
5         return(n**2+somme(n-1))
6 def aire(n):
7     return(1/n**3*somme(n))
8
CoursSIA/Suites/Info')
In [2]: somme(2)
Out[2]: 5
In [3]: somme(3)
Out[3]: 14
In [4]: aire(10)
Out[4]: 0.385
In [5]: aire(100)
Out[5]: 0.33835
Python co... Histor... Console iPy...

```

4.3. La somme des carrés

La méthode de Leibniz nous dit que pour calculer la somme des carrés, nous devons trouver la solution de l'équation

$$\Delta u = n^2, \quad u_0 = 0$$

C'est à dire « intégrer » la suite (n^2) .

Exercice 4.2. — Considérons la suite v définie par $v_n = n^2$. Calculer $\Delta(v)$. Que pouvez-vous déduire de votre calcul ?

Réponse. —

$$\Delta v_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

On en déduit que la somme d'entiers consécutifs est le carré du nombre d'entiers :

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2.$$

Par exemple pour $n = 3$:

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2.$$

Exercice 4.3. — Considérons la suite v définie par $v_n = n^3$. Calculer $u = \Delta(v)$. En déduire la valeur de

$$\sum_{i=1}^n i^2$$

Réponse. — On a

$$u_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Le principe de Leibniz nous redonne la formule de Pascal :

$$\sum_{i=0}^n (3i^2 + 3i + 1) = (n+1)^3.$$

Par exemple, pour $n = 3$:

$$1 + 7 + 19 + 37 = 64 = (3+1)^3$$

Par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= \sum_{i=0}^n (3i^2 + 3i + 1), \\ &= 3 \sum_{i=0}^n i^2 + 3 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1, \\ &= 3 \sum_{i=0}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= 3 \sum_{i=0}^n i^2 + \frac{(3n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i^2 &= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(3n+2)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Par exemple pour $n = 4$:

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \frac{4 \times 5 \times 9}{6}$$

Nous avons ainsi démontré la formule pour la somme des carrés :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 4.4. — Vérifier la formule des carrés pour $n = 1, 2, 3$ puis calculer

$$\sum_{i=1}^{10} i^2, \quad \sum_{i=1}^{100} i^2.$$

Réponse. — On trouve successivement

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 i^2 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = 5$$

$$\sum_{i=1}^3 i^2 = \frac{3(3+1)(6+1)}{6} = 14$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{10(10+1)(20+1)}{6} = 385$$

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338\,350$$

Pas mal non ?

4.4. Le théorème d'Archimède (suite)

La formule pour la somme des carrés nous donne l'approximation au rang n de l'aire sous la parabole. En effet nous avons vu que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{10} i^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\end{aligned}$$

Plus n est grand plus le numérateur est proche de $2n^3$ car pour n très grand

$$n+1 \approx n$$

$$2n+1 \approx 2n$$

Donc l'aire sous la parabole s'approche de la valeur

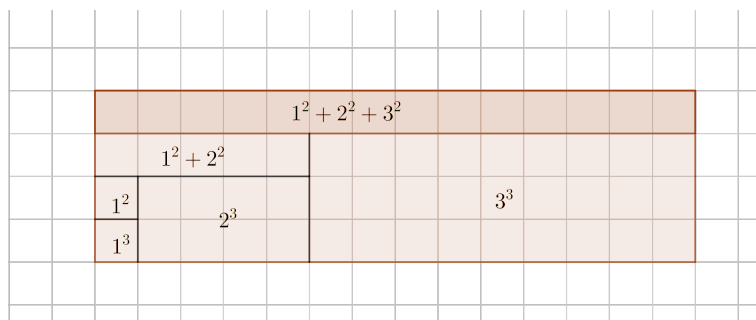
$$\frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Ce qui correspond bien au théorème d'Archimède !

4.5. La formule d'Alhazen par Alhazen

Nous allons faire un bond en arrière dans l'histoire, à une époque où Leibniz n'avait pas encore découvert son principe. Alhazen, forme latinisé de Al Hassan Ibn al-Haytham, (965-1039) vécut entre Bagdad et le Caire. Prolongeant les constructions classiques des Grecs, que l'on trouve par exemple chez Euclide, Alhazen établit une méthode géométrique à la fois ingénieuse et complexe pour le calcul des sommes de puissances que nous allons illustrer pour $k = 3$. Disons le tout de suite, même avec nos méthodes cela requiert de la virtuosité dans l'utilisation des sommes et la méthode de Leibniz nous permettra de donner une solution beaucoup plus simple. Mais il me semble que c'est un calcul amusant.

Il s'agit d'un jeu de tangram. Examinons la figure suivante :



La somme des petits rectangles est égale au grand rectangle. Par conséquent, cette figure nous indique que :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) = (1^2 + 2^2 + 3^2) \times (3 + 1).$$

Plus généralement, en utilisant la formule pour la somme des carrés on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i^2 &= \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \times (n + 1) \\ \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times (n+1) \end{aligned}$$

Il faut maintenant développer la deuxième somme :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j^3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j^3 + \frac{n(n+1)^2}{6} \end{aligned}$$

Ouf!! Et en revenant à notre identité initiale et en notant i l'indice au lieu de j , on trouve finalement :

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} \sum_{i=1}^n i^3 + \frac{n(n+1)^2}{6} &= \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6} \\ \frac{4}{3} \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{n(n+1)^2 \times 2n}{6} \\ \frac{4}{3} \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{3} \\ \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré la formule d'Alhazen :

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

On a par exemple

$$1 + 8 + 27 + \cdots + 1000 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 = 3025$$

4.6. La formule d'Alhazen par Leibniz

Fi des raisonnements géométriques complexes ! La démonstration de Leibniz se réduit à une simple application du principe général.

Exercice 4.5. — Considérons la suite v définie par $v_n = n^4$. Calculer $u = \Delta(v)$. Retrouver la formule de Pascal et en déduire la valeur de

$$\sum_{i=1}^n i^3.$$

Réponse. — On a

$$u_n = (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Par conséquent, d'après le principe télescopique

$$\sum_{i=0}^n (4i^3 + 6i^2 + 4i + 1) = (n+1)^4.$$

Par linéarité de la somme, on retrouve la formule de Pascal :

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 4 \sum_{i=0}^n i^3 + 6 \sum_{i=0}^n i^2 + 4 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1, \\ &= 4 \sum_{i=0}^n i^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + (n+1) \\ &= 4 \sum_{i=0}^n i^3 + (n+1)(n(2n+1) + 2n + 1) \\ &= 4 \sum_{i=0}^n i^3 + (n+1)^2(2n+1) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} 4 \sum_{i=0}^n i^3 &= (n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1) \\ &= (n+1)^2((n+1)^2 - 2n - 1) \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

et cela nous conduit à la formule :

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

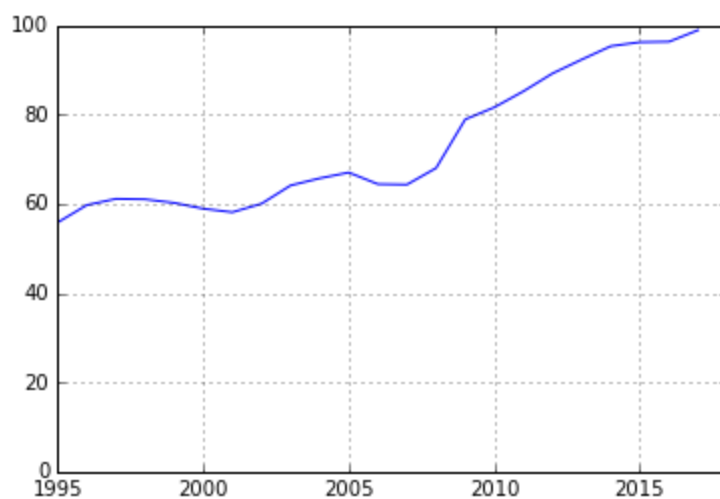
CHAPITRE 5

DÉRIVÉE DISCRÈTE

5.1. Analyser la dette publique

La méthode d'exhaustion consiste à approcher une courbe par une ligne polygonale, dans certains cas c'est le graphe d'une fonction affine par morceaux. Nous allons introduire la notion de dérivée pour une telle fonctions.

La figure suivante représente la dette publique de la France entre 1995 et 2016.



L'axe des ordonnées indique le pourcentage du produit intérieur brut. Par exemple, en 1995, la dette représentait 55,8% du produit intérieur brut.

À première vue, la dette ne fait qu'augmenter de manière à peu près régulière. C'est un lieu commun : « toutes les années sont identiques, la dette augmente. » Regardons cela de plus près.

La liste de la dette année après année, donne une suite à 21 termes :

$$u = (55.8, 59.7, 61.1, 61, 60.2, 58.9, 58.1, 60, 64.1, \\ 65.7, 67, 64.4, 64.3, 68, 78.9, 81.6, 85.2, 89.2, \\ 92.3, 95.3, 96.2, 96.3, 98, 9)$$

Dans la représentation graphique, python joint les points deux à deux pour obtenir une fonction dite *af-fine par morceaux* :

$$f : [1995, 2015] \rightarrow \mathbb{R}$$

Ce qui signifie que sur certains intervalles (ici une année), la fonction est affine mais qu'elle n'est pas affine globalement : c'est un recollement de fonctions affines.

La croissance de la dette est donnée par la différence de la suite u :

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

Regardons par exemple en détail les premières années.

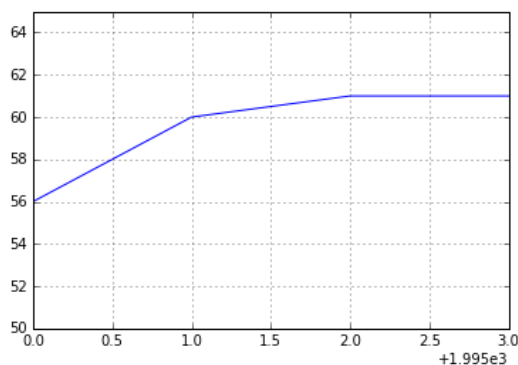
$$u = (55.8, 59.7, 61.1, 61. \dots)$$

La différence de cette suite est :

$$\Delta u = (59.7 - 55.8, 61.1 - 59.7, 61 - 61.1, \dots) \\ = (3.9, 0.4, -0.1, \dots)$$

Ce qui signifie que la dette a augmenté de 3.9% la première année, 1.1% la seconde etc.

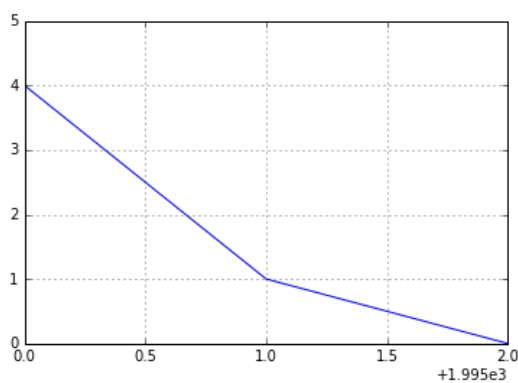
Faisons un zoom sur le début de notre courbe, nous voyons une courbe polygonale composée de trois droites dont les pentes sont respectivement 3.9, 1.1 et 0.4 :



Sur ces trois intervalles, la fonction est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 55.8 + 3.9x & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 59.7 + 1.1(x - 1) & \text{pour } x \in [1, 2] \\ 61.1 + 0.4(x - 2) & \text{pour } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant représenter la courbe non pas de la dette, mais de l'augmentation de la dette, c'est-à-dire la fonction associée à Δu :



La première année cette augmentation est de 3.9, 1.1 et 0.4. La lecture de notre première courbe est facilitée.

La dette a augmenté (première courbe), mais cette augmentation a diminué de manière drastique (deuxième courbe). Nous avons ainsi construit à partir de la fonction f donnant la dette, une nouvelle fonction appelée *fonction dérivée discrète* ou simplement *dérivée* notée f' . Cette fonction nous décrit l'accroissement de la dette et tient, dans le cas polygonal, le rôle de dérivée.

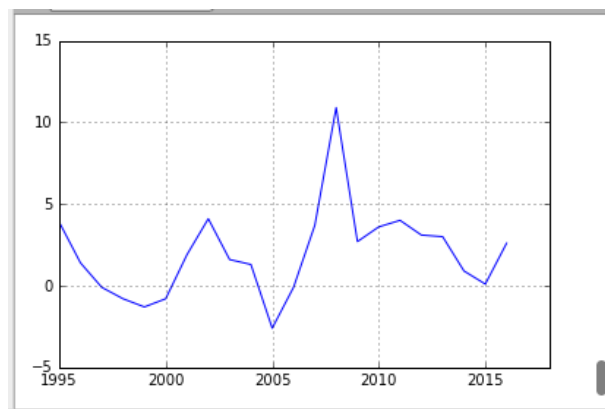
Exercice 5.1. — Écrire un script python pour calculer la fonction dérivée de la dette et la représenter graphiquement.

Réponse. —

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 u=[55.8,59.7,61.1,61,60.2,58.9,58.1,60,64.1,6
4 x=np.arange(1995,2017,1)
5 def diff(u):
6     v=[]
7     for i in range(len(u)-1):
8         v.append(u[i+1]-u[i])
9     return(v)
10 plt.grid()
11 plt.axis([1995,2018,-5,15])
12 plt.plot(x,diff(u))
13
```

La commande `plt.grid` permet d'afficher le quadrillage.

Attention : le chiffre à l'année n correspond à l'accroissement pendant l'année. Ainsi l'accroissement a atteint son taux le plus bas en 2005-2006 et 2015-2016 et son taux record entre 2008-2009.



Alors que la courbe de la dette semblait quasiment identique à elle-même en chaque point, on voit sur la dérivée que les années ne se ressemblent pas du tout ! De 2005 à 2008, l'augmentation de la dette s'est considérablement accrue, préfigurant la crise financière mondiale des années 2007-2008. La sortie de crise est marquée par une baisse très significative. Ainsi l'analyse des cycles économiques semble de prime abord bien plus simple sur la dérivée.

En effet alors qu'en 2005, la dérivée était négative autrement dit la dette baissait, elle augmente ensuite de manière abrupte. On voit apparaître sur ce schéma une sorte de cycle où la dérivée augmente puis diminue. Parfois la diminution est assez importante pour atteindre des valeurs négatives comme en 1999 et en 2005, d'autre fois la diminution de la croissance de la dette ne permet pas d'infléchir la courbe comme en 2009.

5.2. Fonctions affines par morceaux

Récapitulons. Notre objet de base est la *fonction affine par morceaux* : on se donne deux suites de points

$$\begin{aligned}x &= (x_0, x_1, \dots, x_n), \\ y &= (y_0, y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

dont la première est strictement croissante. Nous joignons les points (x_i, y_i) de manière à obtenir une ligne polygonale. Lorsque les y_i sont les images des x_i , cette ligne polygonale ressemble beaucoup au graphe de f , pourvu que le nombre de points soit assez grand.

Parfois, nous utiliserons la notation python et noterons simplement :

$$f(x) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

pour dire que $f(x_i) = y_i$ et que f est la fonction affine par morceaux construite sur les suites y et x . En pratique, la suite (x_n) est une suite arithmétique et sa raison sera appelé *le pas*, car dans la pratique il s'agit d'une approximation d'une fonction avec un certain pas. Pour éviter une surcharge inutile de notations, on utilisera la même lettre x pour la suite et pour la variable de la fonction affine par morceaux. Si l'une des suites est plus longue (cela arrivera parfois) que l'autre on ne tient pas compte des « termes en trop ».

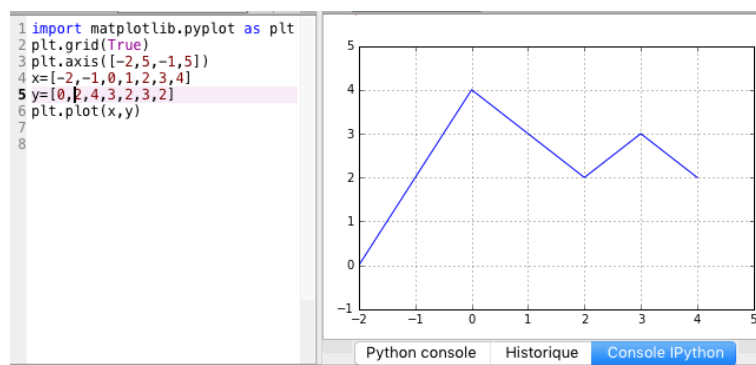
Par exemple avec les suites :

$$x = (-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4), \quad y = (0, 2, 4, 3, 2, 3, 2)$$

on construit une fonction

$$f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

affine par morceaux.



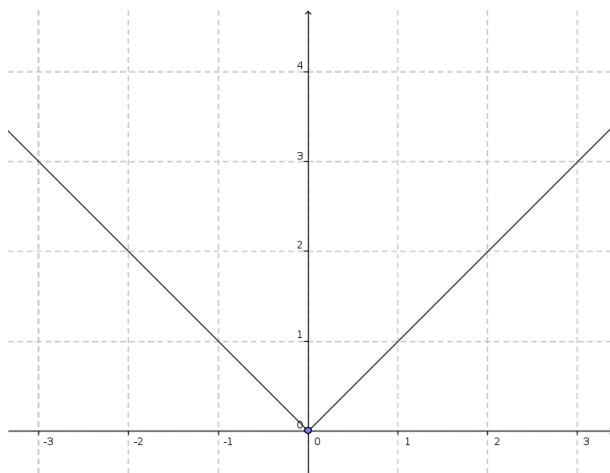
Cette fonction est définie par les formules :

$$x \mapsto \begin{cases} 2(x+2) & \text{si } x \in [-2, 0] \\ -x+4 & \text{si } x \in [0, 2] \\ (x-2)+2 & \text{si } x \in [2, 3] \\ -(x-3)+3 & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases}$$

Autre exemple : la fonction affine par morceau

$$x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

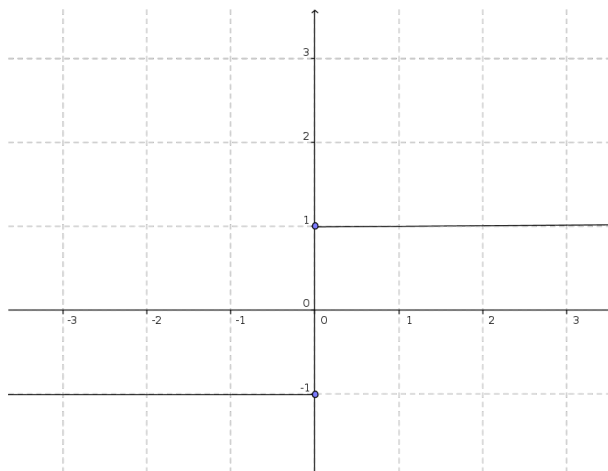
n'est autre que la valeur absolue.



Le graphe d'une fonction affine par morceaux est une courbe polygonale. Lorsque cette courbe polygonale est d'un « seul morceau » on dit que la fonction est *continue*. La valeur absolue est continue, mais la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ne l'est pas. En effet, son graphe se compose de deux demi-droites horizontales dans le plan.



5.3. Dérivée discrète

Pour chaque suite u , nous avons défini la différence

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

Convenons de noter

$$\frac{u}{v} = \left(\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \dots \right)$$

le quotient terme à terme de deux suites et uv leur produit terme à terme. Soit x, y deux suites finies de même longueur.

Définition 5.2. — Soit f une fonction affine par morceaux construite sur des suites x, y . On appelle *dérivée au sens des différences finies* ou encore *dérivée discrète* de y par rapport à x la suite $\Delta y / \Delta x$ notée f'

Dans nos exemples, la suite (x_n) sera presque toujours arithmétique. Par conséquent, les dénominateurs seront constants.

Si f est un polynôme alors par la méthode d'exhaustion, la dérivée au sens des différences finies est une approximation du polynôme dérivée ⁽¹⁾.

1. Voir *Mathématique Autrement, Algèbre*.

La dérivée au sens des différences finies est celle que nous implémentons dans les ordinateurs pour les calculs numériques, c'est la dérivée des informaticiens.

Proposition 5.3. — *La fonction affine par morceaux associée à des suites $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ est définie par*

$$f(x) = f'(x_i)(x - x_i) + y_i$$

pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

5.4. Exercices simples

Dans chacun des cas, on demande de trouver la fonction affine par morceaux associée aux suites puis de tracer son graphe.

1. — $x = (-1, 0, 1), y = (2, 1, 3)$.

2. — $x = (-2, 0, 1, 3), y = (2, -1, 3, -2)$.

3. — $x = (-1, 0, 2, 4), y = (1, -1, 1, -1)$.

4. — Calculer la dérivée de la fonction affine par morceaux associée aux suites :

$$x_n = 0, 1 \times n$$

$$y_n = x_n^2.$$

pour n variant de 0 à 10.

1. — On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (-1, 2)$$

La fonction affine par morceaux

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

est définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} -(x+1) + 2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 2x + 1 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

2. — On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (-3/2, 4, -5/2)$$

La fonction affine par morceaux vaut :

$$x \mapsto \begin{cases} -3/2(x+2) + 2 & \text{si } x \in [-2, 0] \\ 4x - 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ -5/2(x-1) + 3 & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

3. — On a

$$\Delta x = (1, 2, 2)$$

$$\Delta y = (-2, 2, -2)$$

$$\Delta y / \Delta x = (-2, 1, -1).$$

La fonction affine par morceaux vaut :

$$x \mapsto \begin{cases} -2(x-1) + 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x - 1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ -(x-2) + 1 & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases}$$

4. — La suite (x_n) est arithmétique, sa différence est la suite constante

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n = 0, 1.$$

Calculons maintenant la différence de la suite (y_n) :

$$\begin{aligned} (\Delta y)_n &= y_{n+1} - y_n \\ &= ((0, 1)(n+1))^2 - ((0, 1)n)^2 \\ &= 0, 02n + 0, 01 \end{aligned}$$

On trouve ainsi que f' est la fonction affine par morceaux associée à la suite de terme général

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{0, 02n + 0, 01}{0, 1} \\ &= 0, 2n + 0, 1 \\ &= 2x_n + 0, 1 \end{aligned}$$

La dérivée est la fonction affine

$$x \mapsto 2x + 0, 1$$

5.5. Programmer la dérivée

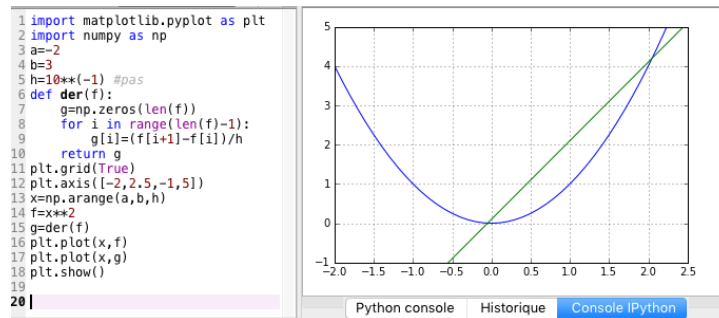
En pratique, on prend pour x les termes d'une suite arithmétique de raison h dans un intervalle $[a, b]$ avec $x_0 = a$. On aura donc

$$x = (a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh)$$

La dérivée discrète est le taux d'accroissement défini par

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Ce que l'on implémente très simplement en python :



Dans la fonction `der`, au lieu de poser `g = []` et d'utiliser la commande `np.append`, j'ai appelé la fonction de `zeros` de python qui envoie un tableau de zéro de taille fixée. Ceci permet à python de connaître la taille de `g` et d'effectuer les calculs plus rapidement.

J'ai ensuite demandé à python de tracer le graphe de la fonction carré et de sa dérivée.

5.6. La vitesse comme dérivée

La dérivée $\Delta y / \Delta x$ est donc l'accroissement de y en fonction de x . Si x désigne le temps et y est une distance alors $\Delta y / \Delta x$ est la vitesse. Dans ce cas il est plus courant de changer le nom de la variable x en t , comme temps.

Exercice 5.4. — Un mobile se déplace en ligne droite. On a mesuré sa position en mètres à chaque seconde sur une échelle graduée. On a trouvé

$$x = (0, 1, 3, 4, 5, 7).$$

Représenter le graphe de la position puis celui de la vitesse.

Réponse. — *La première seconde, il parcourt un mètre. Donc sa vitesse est de 1 m.s^{-1} . La deuxième seconde il parcourt 2 mètre sa vitesse passe donc à 2 m.s^{-1} et ainsi de suite. De manière plus formelle, on a les suites :*

$$t = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$x = (0, 1, 3, 4, 5, 8, 9)$$

On calcule leurs différences :

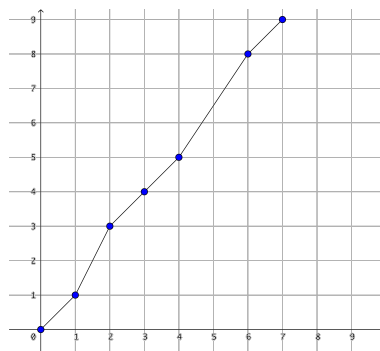
$$\Delta t = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Delta x = (1, 2, 1, 1, 3, 1)$$

Les vitesses correspondantes sont les quotients des différences :

$$\Delta x / \Delta t = (1, 2, 1, 1, 3, 1)$$

Donc graphiquement, les pentes des droites correspondent aux vitesses :



Exercice 5.5. — Une voiture part à 20 km/h puis double à chaque heure jusqu'à atteindre 60 km/h, puis elle rebrousse chemin tout en diminuant sa vitesse de 20 km/h jusqu'à l'arrêt. Modéliser cette situation et représenter graphiquement la trajectoire en fonction du temps.

Réponse. — Dans ce cas :

$$t = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\Delta x / \Delta t = (20, 40, 60, -40, -20)$$

par conséquent

$$x = (0, 20, 60, 120, 80, 60)$$

CHAPITRE 6

L'INTÉGRALE DISCRÈTE

6.1. Définition

La définition de l'aire est une tâche de longue haleine. En revanche, dans le cas discret nous n'avons affaire qu'à des polygones et pour les fonctions à des trapèzes, l'aire est alors une quantité définie à partir de celle des triangles qui composent le polygone.

On se donne deux suites finies de points

$$x = (x_0, \dots, x_n),$$

$$y = (y_0, \dots, y_n),$$

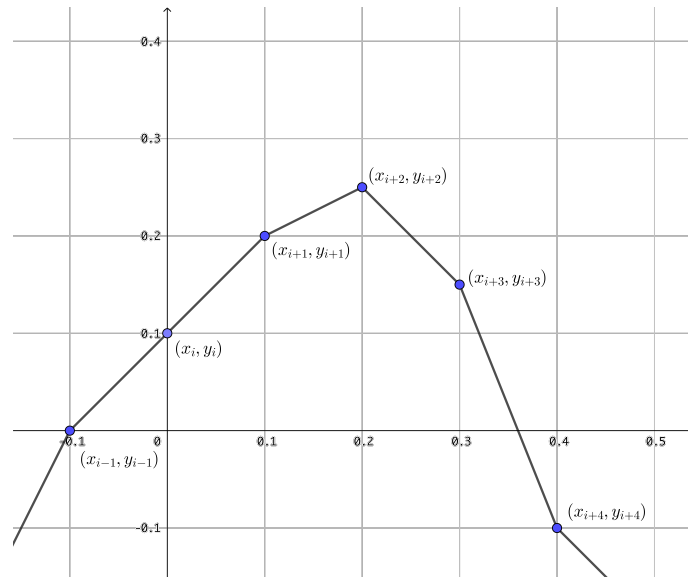
dont la première est strictement croissante et généralement arithmétique :

$$x_{i+1} = x_i + h.$$

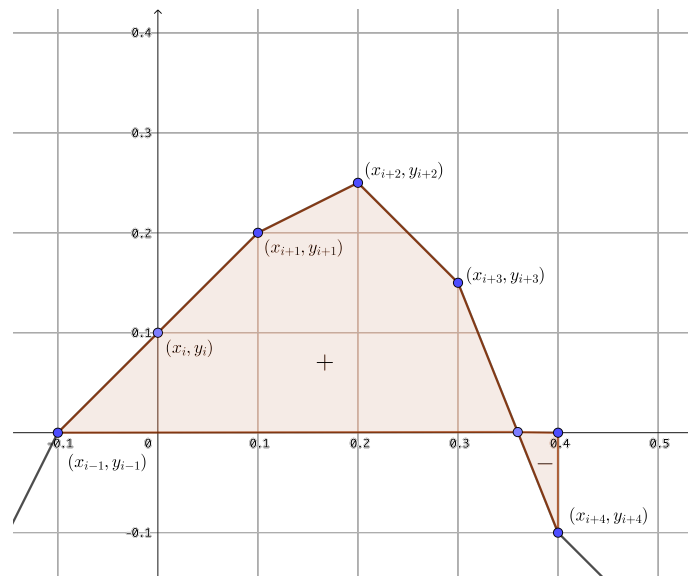
On lui associe une fonction affine par morceaux

$$f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$$

qui envoie x_i sur y_i . Le graphe de la fonction f est donc composé de n segments joignant (x_0, y_0) à (x_1, y_1) , (x_1, y_1) à (x_2, y_2) , (x_i, y_i) à (x_{i+1}, y_{i+1}) .



Par convention, nous calculons l'aire sous le graphe en comptant positivement l'aire située au dessus de l'axe des abscisses et négativement l'aire située en dessous :



Cette quantité s'appelle l'intégrale de f entre x_0 et x_n et on la note

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

ou encore

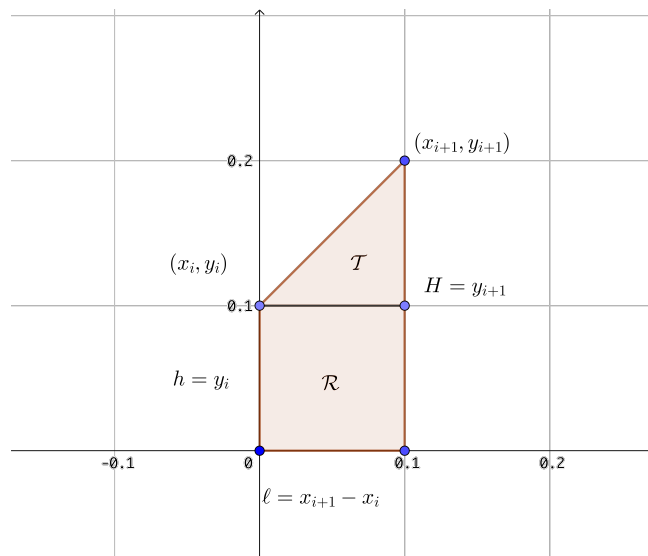
$$\int_{x_0}^{x_n} f.$$

Le symbole $\int$ introduit par Leibniz est une abbréviation de somme, car en ces temps reculés cette lettre était tout simplement un s . Au cours des temps, il est devenu de plus en plus droit et de moins en moins penché, ce qui en a fait une lettre propre aux mathématiques.

Attention il est facile de confondre les anciens s avec les anciens f . Par exemple sur un violon, les ouïes représentent des f et non des s ...

6.2. Formule pour l'intégrale

Pour établir la formule qui définit l'intégrale, il nous faut calculer l'aire sous le segment qui joint (x_i, y_i) à (x_{i+1}, y_{i+1}) . C'est un trapèze de largeur $\ell = x_{i+1} - x_i$ dont les hauteurs valent $h = y_i$ et $H = y_{i+1}$:



On calcule son aire en le divisant en un triangle $\mathcal{T}$ et un rectangle $\mathcal{R}$. L'aire du rectangle ⁽¹⁾ $\mathcal{R}$ vaut

$$y_i(x_{i+1} - x_i) = y_i \Delta x_i$$

et celle du triangle $\mathcal{T}$:

$$\frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}\Delta y_i \Delta x_i$$

Ce qui nous donne une aire totale de

$$\begin{aligned} y_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \Delta y_i \Delta x_i &= y_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \left(y_i + \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) \right) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{y_{i+1} + y_i}{2} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{(H + h)\ell}{2} \end{aligned}$$

C'est une formule bien connue de géométrie élémentaire : « *l'aire d'un trapèze vaut la moyenne des côtés parallèles que multiplie la hauteur* ».

Nous avons ainsi démontré la formule

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} + y_i) \Delta x_i$$

1. Je ne traite que le cas $y_{i+1} > y_i$ et je laisse au lecteur le soin de vérifier la formule pour $y_{i+1} \leq y_i$!

Lorsque la suite (x_i) est arithmétique de raison h , on a $\Delta x_i = h$. La formule se simplifie et donne simplement

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} + y_i) \\ &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_0 + y_n \right) \\ &= h \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{h(y_0 + y_n)}{2}\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{h(y_0 + y_n)}{2}$$

C'est la moyennes des sommes

$$\begin{aligned}s_n &= h \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ s'_n &= h \sum_{i=1}^n y_i\end{aligned}$$

qui correspondent aux aires des rectangles à gauche et à droite de la courbe.

6.3. Exercices simples

1. — Partons de la fonction polynomiale

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Choisissons onze points en progression arithmétique sur le segment $[0, 1]$:

$$x = (0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1)$$

et prenons leur image par l'application

$$y = (0, 0.01, 0.04, 0.09, \dots, 1).$$

On obtient ainsi une application affine par morceaux. Calculer

$$\int_0^1 f$$

et donner l'approximation donnée par la méthode des rectangles.

2. — En reprenant l'exercice précédent avec 101 points en progression arithmétique sur le segment $[0, 1]$ de combien sera l'erreur commise par la méthode des rectangles ?

3. — Ecrire un script python qui approche

$$\int_{-1}^1 x^2 dx$$

par la méthode des rectangles avec un pas de $h = 10^{-3}$.

4. — Considérez la fonction affine par morceaux f associée aux suites (x est arithmétique) :

$$x = (-1, 0, 1, \dots, 5), \quad y = (2, 4, 3, 2, 3, 2, 1)$$

Calculer son intégrale ainsi que l'approximation des rectangles.

1. — Ici $\Delta x_i = h = 1/10$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 y dx &= h \left(\sum_{i=1}^9 y_i + \frac{y_0 + y_{10}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^9 \left(\frac{i}{10} \right)^2 + \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^9 i^2 + \frac{1}{20} \\ &= \frac{9 \times 10 \times 19}{6\,000} + \frac{1}{20} \\ &\approx 0,335 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne environ $1/3$ comme prévu par le théorème d'Archimède.

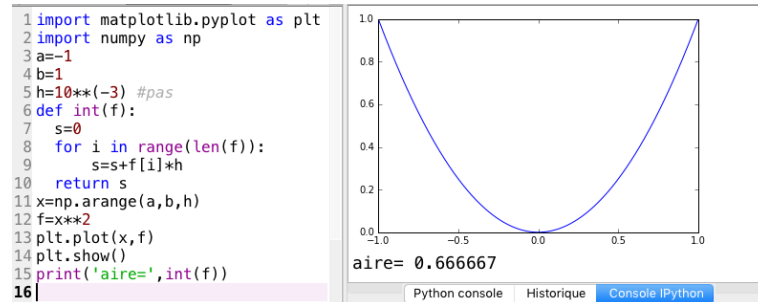
Dans l'approximation par les rectangles :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} y dx &\approx \frac{1}{10} \sum_{i=0}^9 \left(\frac{i}{10} \right)^2 \\ &= \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^9 i^2 \\ &\approx 0.285 \end{aligned}$$

L'approximation n'est pas très bonne car nous avons pris très peu de rectangles. Cependant, les deux valeurs diffèrent seulement de $0,05$ pour à peine dix points.

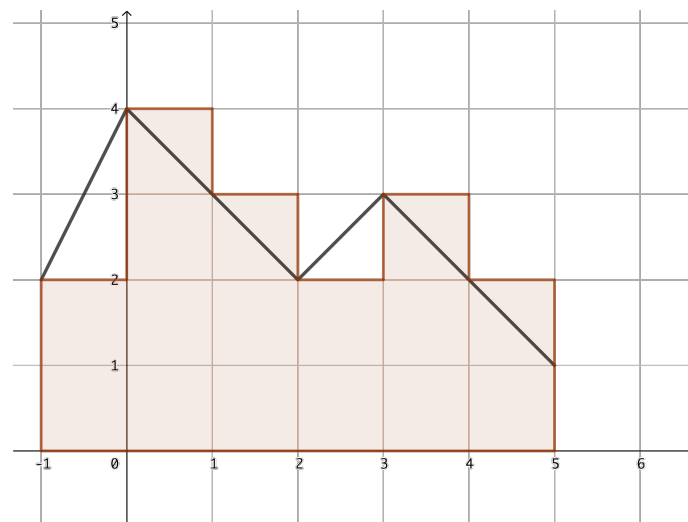
2. — L'erreur sera de 0.005 . Plus généralement pour une suite de raison 10^{-n} , l'erreur sera de $5 \times 10^{-n-1}$.

3. —

4. — Ici $\Delta x_i = h = 1$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 \int_0^5 f &= \sum_{i=1}^5 y_i + \frac{y_0 + y_5}{2} \\
 &= 4 + 3 + 2 + 3 + 2 + \frac{3}{2} \\
 &= 15.5
 \end{aligned}$$

L'approximation des rectangles donne 6 rectangles :



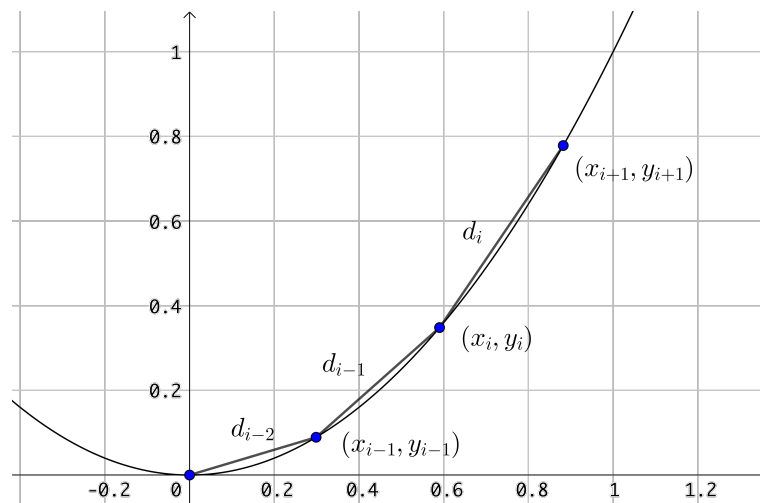
Cette approximation nous dit que

$$\int_0^5 f \approx \sum_{i=0}^5 y_i = 2 + 4 + 3 + 2 + 3 + 2 = 16.$$

6.4. Calculs de longueurs

À l'origine, Archimède souhaitait calculer des aires et... des longueurs.

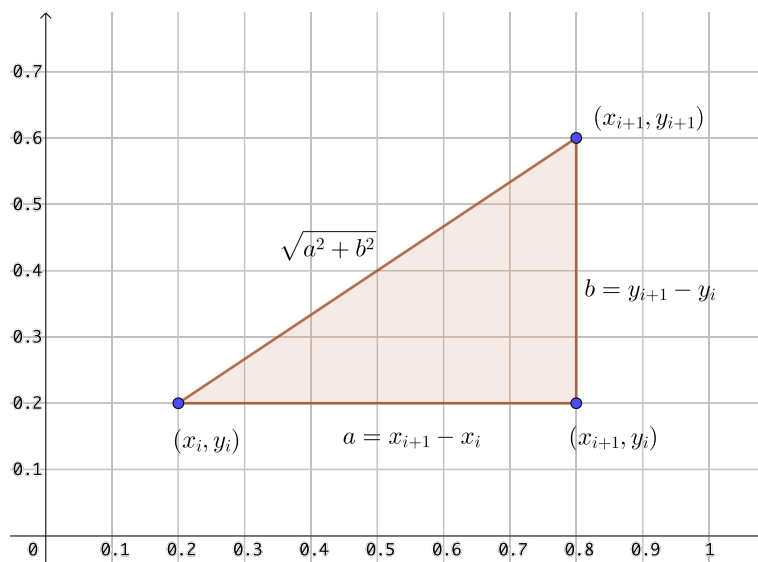
Lorsque l'on dispose d'un arc de courbe, nous l'approchons par une ligne polygonale.



La distance d_i entre deux points (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) est donnée par le théorème de Pythagore :

$$d_i = \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

Comme le montre une figure simple :



Par conséquent, la longueur de notre ligne polygonale vaut :

$$\begin{aligned} \ell &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \end{aligned}$$

Pour appliquer cette formule, il faut pouvoir construire des points sur la courbe ce qui n'est pas toujours évident ⁽²⁾. En revanche, si la courbe est le graphe d'une fonction c'est immédiat.

2. Le plus simple est souvent d'appliquer la méthode de Newton, voir *Mathématique autrement, Algèbre*.

Faisons donc l'hypothèse que les y_i sont les images des x_i par une fonction f et que x_i est une suite géométrique de raison h , la formule précédente nous donne alors

$$\begin{aligned}\ell &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{h^2 + \Delta y_i^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{h^2}} \\ &\approx \int_{x_0}^{x_n} \sqrt{1 + (f')^2}\end{aligned}$$

où l'on a reconnu l'approximation des rectangles pour l'intégrale. C'est la formule générale d'exhaustion pour la longueur d'une courbe.

6.5. Calculs de longueurs en python

Exercices.

1. — Écrire un script pour calculer la longueur de l'arc joignant $(0, 0)$ à $(1, 1)$ sur la parabole d'équation $y = x^2$.
2. — Écrire un script pour calculer la longueur de l'arc joignant $(0, 1)$ à $(1, 0)$ sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ en utilisant l'approximation des rectangles. En déduire une approximation de π .
3. — Améliorer l'approximation précédente en utilisant la méthode des trapèzes.

Réponses.

1. —

<pre> 1 import numpy as np 2 h=10**(-4) 3 x=np.arange(0,1,h) 4 def diff(u): 5 v=np.zeros(len(u)) 6 for i in range(len(u)-1): 7 v[i]=(u[i+1]-u[i]) 8 return(v/h) 9 def int(u) : 10 s=0 11 for x in u: 12 s=s+x 13 return(h*s) 14 </pre>	<pre> In [50]: f=x**2 In [51]: int(f) Out[51]: 0.33328333499999835 In [52]: int((1+diff(f)**2)**(1/2)) Out[52]: 1.478819258945721 In [53]: </pre>
--	--

2. —

<pre> 1 import numpy as np 2 h=10**(-7) 3 x=np.arange(0,1,h) 4 def diff(u): 5 v=np.zeros(len(u)) 6 for i in range(len(u)-1): 7 v[i]=(u[i+1]-u[i]) 8 return(v/h) 9 def itg(u) : 10 s=0 11 for x in u: 12 s=s+x 13 return(h*s) 14 def longueur(f): 15 u=(1+diff(f)**2)**(1/2) 16 return(itg(u)) 17 f=(1-x**2)**(1/2) 18 print("pi=",2*longueur(f)) </pre>	<pre> In [16]: runfile('/Users/ Mauricio/Dropbox/ CoursSIA/Info/ longueur_parabole.py', wdir='/Users/Mauricio/ Dropbox/CoursSIA/Info') pi= 3.14069842639 In [17]: </pre>
---	---

3. — On obtient un résultat plus précis avec la méthode des trapèzes :

The screenshot shows a Jupyter Notebook with two tabs: 'temp.py' and 'longueur_parabole.py'. The 'longueur_parabole.py' tab is active, displaying the following Python code:

```

1 import numpy as np
2 h=10**(-6)
3 x=np.arange(0,1+h,h)
4 def diff(u):
5     v=np.zeros(len(u))
6     for i in range(len(u)-1):
7         v[i]=(u[i+1]-u[i])
8     return(v/h)
9 def itg(u) :
10     s=0
11     for x in u[1:len(u)-1]:
12         s=s+x
13     return(h*s+u[0]/2*h+u[le
14 def longueur(f):
15     u=(1+diff(f)**2)**(1/2)
16     return(itg(u))
17 f=(1-x**2)**(1/2)
18 print("pi=",2*longueur(f))

```

The 'Console 4/A' tab on the right shows the execution results:

```

In [29]: runfile('/Users/Mauricio/Dropbox/CoursSIA/Info/longueur_parabole.py',
wdir='/Users/Mauricio/Dropbox/CoursSIA/Info')
pi= 3.1415926533

In [30]: '|

```


CHAPITRE 7

LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

7.1. Du principe découle le théorème.

Nous avons vu que Leibniz plaçait au sommet de ses découvertes le principe :

$$a - b + b - c + c - d + d - e = a - e.$$

Ce n'est pas sans raison ! Le savant y voyait une sorte de prédestination à devenir l'inventeur du calcul différentiel. Arrivé à Paris, il avait croisé Huygens, lequel par ses questions l'avait amené à découvrir le principe qui l'amena, quelques années plus tard, à la mise en lumière d'une dualité entre dérivée et intégrale, entre le calcul d'aires et le calcul de longueurs...

Supposons que nous intégrions la dérivée d'une fonction linéaire par morceaux f :

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx, \quad y = \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Pour simplifier supposons que x est en progression arithmétique de raison h :

$$y_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{h}$$

D'après le principe de Leibniz, on a alors

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_n} y dx &= h \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right) \\
 &= h \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \frac{z_{n+1} - z_n - z_1 - z_0}{2h} \right) \\
 &= z_n - z_1 + \frac{z_1 - z_0 + z_{n+1} - z_n}{2} \\
 &= \frac{(z_{n+1} + z_n) - (z_1 + z_0)}{2}
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré l'égalité :

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(x) dx = \frac{f(x_{n+1}) + f(x_n) - f(x_0) - f(x_1)}{2}$$

Lorsque le nombre de points est élevé $z_{n+1} + z_n$ est proche de $2z_n$ et de même $z_1 + z_0$ est proche de $2z_0$. On obtient ainsi l'approximation :

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx \approx z_n - z_0$$

autrement dit

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(x) dx \approx f(x_n) - f(x_0)$$

De même que la somme et la différence finie sont inverses l'une de l'autre à un décalage des indices près, l'intégrale discrète est approximativement l'inverse de la dérivée discrète.

À l'époque de Leibniz, on considérait qu'une courbe était composée d'une infinité de segments de sorte que la formule devenait exacte lorsque le nombre de points devenait infini. Il fallut attendre plus d'un siècle pour que les mathématiciens donnent un sens précis à ces considérations en inventant la notion de limite.

7.2. Primitives

Dire que f est la dérivée d'une fonction affine par morceaux F revient à dire que

$$f = \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

On dit que F est une *primitive* de f et on note

$$F = \int f.$$

On dit parfois que l'intégrale est indéfinie car ses bornes ne sont pas précisées, mais il faut faire attention car le mot peut avoir une autre signification.

On note souvent les primitives par des grandes lettres F pour la primitive de f , G pour celle de g . Avec la notion de primitive, le théorème fondamental s'écrit :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{F(x_{n+1}) + F(x_n) - F(x_0) - F(x_1)}{2}$$

et on a l'approximation

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx F(x_n) - F(x_0)$$

Exercice 7.1. — Quelle est la primitive de la fonction f construite sur les suites x, y :

$$x = (0, 1, 2, 3, 4), \quad y = (0, 2, 4, 8, 6)$$

qui s'annule en 0.

Réponse. — On a

$$\begin{aligned}\Delta x &= (1, 1, 1, 1) \\ f(x) &= (0, 2, 4, 8, 6)\end{aligned}$$

On doit résoudre

$$f = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Ce qui d'après le théorème fondamental nous donne

$$F = \int f = (0, 0, 2, 6, 14, 20).$$

En dérivant on retrouve bien

$$\Delta F / \Delta x = (0, 2, 4, 8, 6).$$

Exercice 7.2. — Quelle est la primitive de la fonction f construite sur les suites x, y :

$$x = (0, 1, 2, 3, 4), \quad y = (0, 2, 4, 8, 6)$$

qui vaut 1 en 0.

Réponse. — Il suffit d'ajouter 1 à chacun des termes obtenus à l'exercice précédent :

$$F = (1, 1, 3, 7, 15, 21), \quad c \in \mathbb{R}$$

Voilà notre tour d'horizon est terminé.

Nous avons vu comment Leibniz fut conduit à la découverte du calcul différentiel et intégral grâce à la méthode d'exhaustion. En algèbre, nous avons en revanche utilisé l'approche de Fermat et de Newton consistant à faire croître des quantités en négligeant « les petits termes ». Deux conceptions complémentaires toutes deux héritières de la géométrie des Grecs, deux géométries des infiniments petits qu'il nous faudra réconcilier...



IMAGES



Wikimedia Commons : Boulier [3](#), Reisch [5](#), Léonard de Pise dit Fibonacci [7](#), Archimède [118](#) par D. Fetti (1589-1623), Galerie de Peinture des Vieux Maîtres de Dresde, Leibniz [146](#) par Christoph Bernhard Francke (env. 1660-1729), musée Herzog Anton-Ulrich, Brunswick , Huygens [147](#) par Caspar Netscher (env 1639-1684), musée historique de la Haye, Blaise Pascal [162](#) par Jules Cavelier (1814-1894), photographie Pauline Garay.



Wikimedia Commons : A typical page of the Archimedes Palimpsest [123](#), The Walters Museum.



Wikipedia Commons : Lapins, Ein Hase mit blauem Ei par MichaelFrey et Sundance Raphael modifié par HB 8,9,10, 11, Calla Lilly 13 par Fir0002, Mitchell J Feigenbaum 114, Niels Bohr Institute 2006 par Predrag Cvitanović, birdtracks, Oscar Landford 114, Berkeley 1973, par George M. Bergman, Mikhail Lyubic 114, Oberwolfach 2008, par Renate Schmid.

Merci à tous mes élèves du lycée franco-allemand pour leur patience, leur intérêt, leurs critiques et leurs nombreuses remarques sur le texte. Merci aussi aux participants des maths.net et enfin à Cyril Lachaud pour ses conseils sur la programmation en python.

Ce texte utilise le format LaTeX de la smf créé par Antoine Chambert-Loir.

Les programmes python ont été écrits avec l'environnement Spyder, sous licence libre X11.

Compter, énumérer est la première activité mathématique dont nous faisons l'expérience. Le concept de suite cristallise ce principe.

De Fibonacci qui énumère les lapins dans un champ au cours des mois, en passant par Verhulst qui donna une estimation étonnamment précise de la croissance de la population française sur un siècle, les suites sont partout présentes dans l'analyse. Elles en sont même l'un des fondements.

Qu'est-ce que la longueur d'un cercle ? Archimède nous dit que c'est la suite des périmètres de polygones qui l'approchent de plus en plus. Découper, approcher: tel est le coeur de la méthode d'exhaustion découverte par les savants grecs. Après les travaux d'Alhazen, Pascal, Huygens et Leibniz, l'exhaustion devint l'un des piliers du calcul des différences finies et des infiniments petits.

Aujourd'hui à l'ère des ordinateurs, le calcul des différences finies --trop souvent absent des enseignements traditionnels-- est plus que jamais d'actualité. Elle permet aux élèves de se familiariser avec les aspects théoriques de l'analyse tout en s'initiant à la programmation, pour calculer rapidement des longueurs, des aires, des volumes et, plus tard, de prévoir les trajectoires des satellites, des planètes...

M.G.

Mauricio Garay a étudié les mathématiques auprès du mathématicien russe V.I. Arnold. Il a ensuite mené ses recherches dans des instituts de recherche européens (IHES, SISSA, ICTP, Institut Max Planck). Depuis 2015, tout en poursuivant son travail de recherche avec l'Université de Mayence, il enseigne les mathématiques au lycée franco-allemand de Buc et anime des ateliers d'initiation à la recherche.